Система оценивания / Task score

1. Первичная оценка решения каждой задачи выставляется по 5-балльной шкале согласно критериям, описанным после приведенного решения.

2. Для каждой задачи вычисляется средний балл по результатам ее решения всеми участниками, затем этот балл округляется до сотых – получается число M.

3. Весовой коэффициент (K) каждой задачи вычисляется по формуле

$$K = 3 - 0.5 \cdot M$$

4. Балл каждого участника за каждую задачу умножается на весовой коэффициент этой задачи.

5. Баллы, набранные участником, суммируются с последующим округлением до ближайшего целого в бóльшую сторону.

7-8 классы

Задача 1. Даны числа $2025, 2035, 2045\ldots, 2085$. Сколькими способами можно их расставить в ряд так, чтобы сумма любых четырех последовательных чисел в ряду была кратна 3?

Ответ: 144

Решение. Заменив числа $2025, 2035, 2045\ldots, 2085$ их остатками при делении на 3, получим набор $0, 1, 2, 0, 1, 2, 0$. Пусть ряд $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_7$ – один из искомых («правильный»).

Заметим, что $0 \equiv a_1+a_2+a_3+a_4 \equiv a_2+a_3+a_4+a_5 \equiv a_3+a_4+a_5+a_6 \equiv a_4+a_5+a_6+a_7 \pmod 3$, т.е. остатки при делении на 3 в «правильном» ряду циклически повторяются, и набор остатков a_1, a_2, a_3 однозначно определяет остальные остатки: $a_1 \equiv a_5 \pmod 3$, $a_2 \equiv a_6 \pmod 3$, $a_3 \equiv a_7 \pmod 3$. Кроме того, $0 \equiv (a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_4+a_5+a_6+a_7) \equiv (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)+a_4 \equiv a_4 \pmod 3$, поскольку сумма всех чисел в ряду кратна 3. Итак, $a_4 \equiv 0 \pmod 3$.

Теперь подсчитаем количество «правильных» рядов: $3 \cdot 2^3 \cdot 3! = 144$, поскольку есть 3 способа выбрать a_4, и для каждого из них – $2^3 \cdot 3!$ способов выбрать a_1, a_2, a_3, после чего выбор a_5, a_6, a_7 определяется однозначно.

Критерии оценивания:

- приведена идея, что остатки циклируются – 1 первичный балл;
- доказано, что a_1, a_2, a_3 однозначно определяют остальные остатки – 2 первичных балла;
- доказано, что $a_4 \equiv 0 \pmod 3$ – 3 первичных балла;
- приведено верное решение, содержащее незначительные недочеты либо арифметические ошибки – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 2. Найдите все решения ребуса (в десятичной системе счисления):

$$\text{FORTY} + \text{TEN} + \text{TEN} = \text{SIXTY}$$

Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, а разными буквами – разные цифры.

Ответ: $29786 + 850 + 850 = 31486$

Решение. Поскольку $Y + N + N \equiv Y \pmod{10}$, имеем $N = 0$ или $N = 5$. При этом в случае $N = 5$ получим $T + 2 \cdot E + 1 \equiv T \pmod{10}$, что невозможно, поскольку $2 \cdot E + 1$ нечетно – значит, $N = 0$, откуда из $T + 2 \cdot E \equiv T \pmod{10}$ следует $E = 5$.

Из $F \neq S$ следует, что $S = F + 1$, т.к. в разряде тысяч есть только $O + k = I$, причем k получается «переносом» из разряда сотен, поэтому $1 \leqslant k \leqslant 2$ (три слагаемых в разряде сотен не могут иметь сумму более 27). Кроме того, для $S = F + 1$ необходимо $O + k > 9$, откуда $O \geqslant 8$, $I \leqslant 1$, т.е. $I = 1$, а значит $k = 2$, $O = 9$, откуда $R + 2 \cdot T + 1 \geqslant 20$, даже строго > 21 (т.к. $X \neq 0$, $X \neq 1 = I$), т.е $R + 2 \cdot T \geqslant 21$.

Ясно, что $R + 2 \cdot T \leqslant 23$, поскольку $R, T < 9$ и $R \neq T$. Отсюда – три возможных случая:

1. $R + 2 \cdot T = 21$: тогда R нечетно и не равно 7 (иначе $T = R = 7$), но тогда $R = 5$, что также невозможно ввиду $E = 5$.
2. $R + 2 \cdot T = 22$: R четно и равно либо 6, либо 8 (в остальных случаях $R + 2 \cdot T < 22$ из-за $T < 9$) – в обоих случаях $X = 3$, и на буквы F, S, Y остаются либо цифры $2, 4, 7$, либо цифры $2, 4, 6$ – оба случая невозможны, поскольку $S = F + 1$.

3. $R + 2 \cdot T = 23$: тогда $R = 7$ и $T = 8$, откуда $X = 4$, и на буквы F, S, Y остаются цифры $2, 3, 6$, откуда (ввиду $S = F + 1$) имеем $F = 2$, $S = 3$, $Y = 6$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что равенство из условия выполняется.

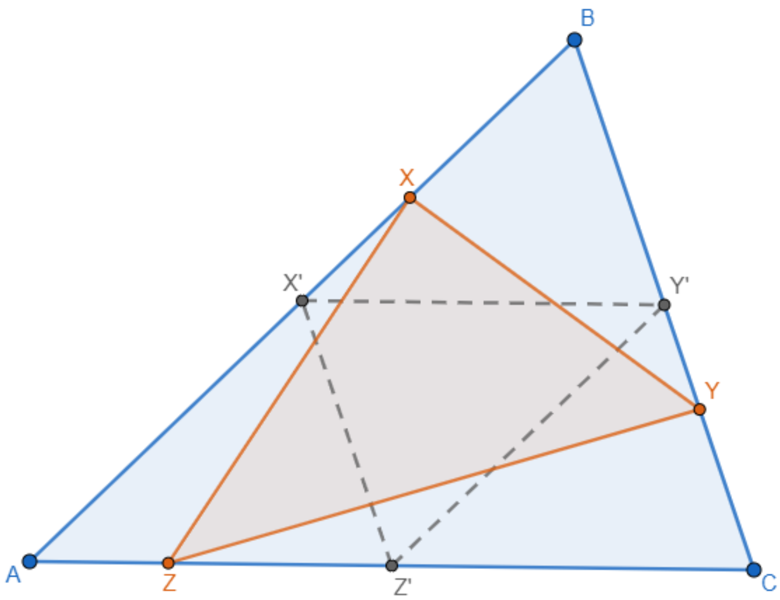
Итак, ребус имеет единственное решение: $29786 + 850 + 850 = 31486$.

Критерии оценивания:

- приведено решение ребуса, но не доказана его единственность – 2 первичных балла;
- приведено решение ребуса, но с ошибками при определении R и/или T – 3 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 3. На плоскости заданы треугольники $\triangle XYZ$ и $\triangle ABC$, причем точка X лежит на отрезке AB $(0 < BX < AX)$, точка Y лежит на отрезке BC $(0 < CY < BY)$, а точка Z лежит на отрезке CA $(0 < AZ < CZ)$. Докажите, что площадь хотя бы одного из треугольников AXZ, BXY, CZY не превосходит площади треугольника XYZ.

Решение. Кроме $\triangle XYZ$ и $\triangle ABC$ рассмотрим $\triangle X'Y'Z'$, составленный из средних линий $\triangle ABC$. Очевидно, площадь $\triangle X'Y'Z'$ равна 1/4 площади $\triangle ABC$.



Так как точки X и X' лежат на прямой, параллельной $Y'Z'$, то площадь треугольника $\triangle XY'Z'$ равна площади треугольника $\triangle X'Y'Z'$. Так как треугольники $\triangle XY'Z'$ и $\triangle XYZ'$ имеют общее основание XZ' , но вершина Y' лежит ближе вершины Y к вершине B угла $\angle ABC$, то площадь треугольника $\triangle XYZ'$ больше площади треугольника $\triangle XY'Z'$. Так как треугольники $\triangle XYZ'$ и $\triangle XYZ$ имеют общее основание XY, но вершина Z' лежит ближе вершины Z к вершине C угла $\angle ACB$, то площадь треугольника $\triangle XYZ$ больше площади треугольника $\triangle XYZ'$.

Подытожим: площадь $\triangle XYZ$ не меньше 1/4 площади треугольника $\triangle ABC$, поэтому на три треугольника $\triangle AXZ$, $\triangle BXY$ и $\triangle CZY$ приходится не более 3/4 площади $\triangle ABC$, поэтому хотя бы один из них должен иметь площадь не больше 1/4 площади $\triangle ABC$ и, следовательно, площадь этого треугольника не больше площади $\triangle XYZ$.

Критерии оценивания:

- предложено сравнить $\triangle XYZ$ со срединным треугольником – 2 первичных балла;

- предложена и частично реализована идея анализа изменения площади при движении точек – 3 первичных балла;
- приведено верное решение, содержащее незначительные недочеты – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 4. Найдите количество положительных правильных (числитель меньше знаменателя) несократимых дробей, для которых произведение числителя и знаменателя равно $45! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots 44 \cdot 45$.

Ответ: 8192

Решение. Числитель и знаменатель несократимой дроби взаимно просты, поэтому каждое простое число, встречающееся в разложении числителя на простые множители, не встречается в разложении знаменателя, и наоборот. Число 45! представимо в виде произведения простых чисел из множества $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43\}$ в некоторых целых положительных степенях, и каждое разбиение множества P на два непересекающихся подмножества A, B соответствует одной положительной правильной несократимой дроби x/y, в которой числитель и знаменатель – произведения простых чисел из A, B в тех же степенях, в которых они входят в разложение 45!, причем меньшее произведение – это x, а большее – y.

Подсчитаем количество упомянутых разбиений множества P: ясно, что для каждого простого числа из P есть две возможности – либо оно «попадает» в A, либо в B. Значит, общее число разбиений равно 2^{14}. Осталось заметить, что все разбиения можно разобрать на пары, отличающиеся перестановкой A и B – итого у нас $2^{14}/2 = 8192$ разбиения и столько же нужных дробей.

Критерии оценивания:

- использована идея подсчета на основе количества простых чисел из $[1; 45]$ – 2 первичных балла;
- приведено верное решение, но допущена арифметическая ошибка, либо получен ответ вдвое больше верного – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 5. В окружность вписан многоугольник, не являющийся правильным. Назовем вершину B этого многоугольника *особенной*, если она делит дугу, заключенную между двумя соседними с ней вершинами A, C, не пополам. Каждую минуту одна особенная вершина перемещается в середину своей дуги. Может ли случиться так, что спустя некоторое время мы получим многоугольник, равный исходному?

Ответ: нет, такого быть не может

Решение. Докажем, что для $a \neq b$ выполнено $a^2 + b^2 > 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Действительно,

$$a \neq b \;\Rightarrow\; (a-b)^2 > 0 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 > 2ab \;\Rightarrow\; 2a^2 + 2b^2 > a^2 + b^2 + 2ab \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{a^2 + b^2}{2} > \frac{(a+b)^2}{4} \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 > 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Допустим, особенная вершина B делит дугу между соседними вершинами A и C на дуги с длинами a и b. Заметим, что, ввиду доказанного неравенства, сумма квадратов длин дуг, ограниченных соседними вершинами многоугольника, каждую минуту становится меньше. В то же время для равных многоугольников эти суммы квадратов равны, что доказывает невозможность получения многоугольника, равного исходному.

Критерии оценивания:

- верно найден полуинвариант, но не доказано соответствующее неравенство – 2 первичных балла;
- верно найден полуинвариант и доказано соответствующее неравенство, но допущена ошибка при его использовании – 3 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

9 класс

Задача 1. Согласно рассказу А. Конан Дойла «Приключение греческого переводчика», находящимся в помещении «Клуба 'Диоген'» членам клуба не дозволяется обращать друг на друга хоть какое-то внимание. Но, оказывается (хотя Артур Конан Дойль об этом не писал и не знал), чтобы стать членом этого Клуба, нужна была рекомендация от одного знакомого, уже являющегося членом Клуба. Таким образом, в каждый момент времени своего существования Клуб объединял некоторое количество членов (не менее двух), каждый из которых был знаком с каким-то другим членом Клуба (отношение знакомства всегда взаимно).

1. Докажите, что в каждый момент существования «Клуба 'Диоген'» среди его членов можно указать двоих, имеющих равное число знакомых среди членов Клуба.

2. Представим, что в некоторый момент времени каждый из n членов Клуба был знаком ровно с 2025 другими членами Клуба. Найдите все возможные значения n.

Ответ: 2. $n \in \{2026, 2028, 2030, 2032, \ldots\}$.

Решение.

1. Пусть $n > 1$ – общее число членов Клуба. Разложим имена всех n членов Клуба по $n-1$ «ящичкам»: имя члена Клуба кладем в ящичек с номером $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, если у этого члена Клуба ровно m знакомых членов Клуба ($1 \leqslant m \leqslant n-1$). Но, согласно принципу Дирихле, два имени неизбежно попадут в один ящичек – значит, найдутся двое членов Клуба, имеющих равное число знакомых среди других членов Клуба.

2. Построим граф, в котором вершины – члена Клуба, а ребра обозначают отношения знакомства между соответствующими членами. Тогда требуется найти все n, при которых существует граф, степень каждой вершины которого равна 2025. Тогда общее число ребер равно $\frac{2025 \cdot n}{2}$, откуда n должно быть четным. Кроме того, очевидно, $n \geqslant 2026$.
Покажем, что любое четное $n \geqslant 2026$ удовлетворяет условию, и для этого построим соответствующий граф. Для удобства построения расположим вершины этого графа в вершинах правильного n-угольника, и пусть каждая вершина графа соединена ребрами со своими ближайшими 2024 «соседями» (1012 по часовой стрелке и столько же – против часовой стрелки) и с противоположной вершиной n-угольника (такая существует, поскольку n четно). Очевидно, условие задачи выполняется.

Критерии оценивания:

- приведено верное доказательство п.1 или приведена верная оценка снизу в п.2 – 1 первичный балл;

- приведено верное доказательство п.1 и приведена верная оценка снизу в п.2 – 3 первичных балла;

- полностью верное и обоснованное решение обоих пунктов – 5 первичных баллов.

Задача 2. Телефонный номер состоит из 10 цифр (каждая из них может быть любой цифрой от 0 до 9) и имеет вид

$$\square\square\square - \square\square\square\square\square\square\square$$

(первые три цифры будем называть префиксом, а остальные семь цифр – хвостом).
Назовем телефонный номер *красивым*, если в его хвосте найдутся хотя бы две последовательности из трех подряд идущих цифр, совпадающие с префиксом (эти последовательности могут пересекаться). Найдите количество *красивых* телефонных номеров.

Ответ: 93610

Решение. Для префикса возможны несколько случаев (далее разными буквами обозначены разные цифры, одинаковыми – одинаковые, а звездочкой – любая цифра):

- XYZ: тогда хвост выглядит как $XYZ*XYZ$, либо $XYZXYZ*$, $*XYZXYZ$ – для фиксированных попарно различных X, Y, Z существует по 10 вариаций каждого из трех упомянутых хвостов, при этом XYZ можно выбрать одним из $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ способов. Итого $720 \cdot 3 \cdot 10 = 21600$ красивых номеров с префиксом этого типа.

- XXX: тогда хвост выглядит как $XXXXY**$ ($YXXXXY*$, $YXXXXZ*$, $*YXXXXY$, $*YXXXXZ$, $**YXXXX$ – итого $900 + 90 + 720 + 90 + 720 + 900 = 3420$ вариаций), либо $XXXXXY*$ ($YXXXXXY$, $YXXXXXZ$, $*YXXXXX$ – итого $90 + 9 + 72 + 90 = 261$ вариация), либо $XXXXXXY$ ($XXXYXXX$, $YXXXXXX$ – итого $9 + 9 + 9 = 27$ вариаций), либо $XXXXXXX$ – 1 вариант. Итого $10 \cdot (3420 + 261 + 27 + 1) = 37090$ красивых номеров с префиксом этого типа.

- XXY или YXX: тогда хвост выглядит как $XXYXXY*$, либо $XXY*XXY$, либо $*XXYXXY$ – по 10 вариаций каждого из трех упомянутых хвостов, при этом XXY можно выбрать одним из $10 \cdot 9 = 90$ способов. Итого $2 \cdot 90 \cdot 3 \cdot 10 = 5400$ красивых номеров с префиксом этого типа.

- XYX: тогда для фиксированных различных X, Y есть следующие варианты для хвоста:
  - $XYXYX**$ (здесь $** \neq YX$): $10^2 - 1 = 99$ вариаций,
  - $*XYXYX*$: $10^2 = 100$ вариаций,
  - $**XYXYX$ (здесь $** \neq XY$): $10^2 - 1 = 99$ вариаций,
  - $XYXXYX*$: 10 вариаций,
  - $XYX*XYX$: 10 вариаций,
  - $*XYXXYX$: 10 вариаций, –

  всего $90 \cdot (99 + 100 + 99 + 10 + 10 + 10) = 29520$ красивых номеров с префиксом этого типа.

Подведем итог: существует $21600 + 37090 + 5400 + 29520 = 93610$ красивых номеров.

Критерии оценивания:

- рассмотрены хотя бы 3 различных вида префикса – 1 первичный балл;

- рассмотрены все виды префикса, но при подсчете количества номеров допущена неарифметическая ошибка – 2 первичных балла;

- рассмотрены все виды префикса, но при подсчете количества номеров допущена только арифметическая ошибка – 3 первичных балла;

- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 3. Точки $A_1, A_2, A_3, \ldots$ расположены на прямой l в упомянутом порядке так, что отрезки $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots$ равны $1, 3, 5, \ldots$, соответственно, и являются основаниями правильных треугольников $A_1A_2B_1, A_2A_3B_2, A_3A_4B_3, \ldots$.

Докажите, что точки $B_1, B_2, B_3, \ldots$ лежат на параболе, и найдите расстояние от вершины этой параболы до точки A_1.

Ответ: $1/4$

Решение. Зададимся прямоугольной системой координат, в которой точка A_1 имеет координаты $(0;0)$, и все точки $A_2, A_3, \ldots$ лежат на положительной полуоси абсцисс. Вершины, лежащие напротив оснований треугольников имеют координаты $B_1(0+1\cdot\frac{1}{2};\pm1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})$, $B_2(0+1+3\cdot\frac{1}{2};\pm3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})$, $B_3(0+1+3+5\cdot\frac{1}{2};\pm5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})$, ..., $B_n(0+1+3+\cdots+(2n-3)+(2n-1)\cdot\frac{1}{2};\pm(2n-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})$, ...

Докажем по индукции, что $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ для $n\geqslant 1$. База индукции очевидна: $2\cdot1-1=1^2$.

Индукционная гипотеза: для некоторого $n\geqslant1$ выполнено $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. Докажем, что тогда подобное выполнено для $n+1$, т.е. $1+3+\cdots+(2(n+1)-1)=(n+1)^2$.

Индукционный шаг:

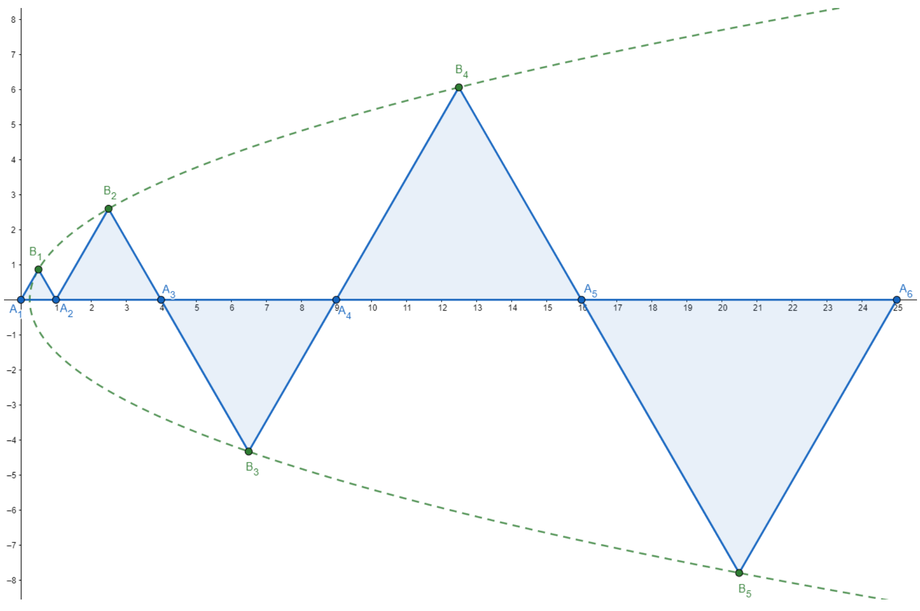
$$1+3+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1)=(1+3+\cdots+(2n-1))+(2n+1)=$$

$$=(\text{согласно индукционной гипотезе})=n^2+2n+1=(n+1)^2,$$

что и требовалось доказать.

Согласно доказанному, $0+1+3+\cdots+(2n-3)+(2n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{2n^2-2n+1}{2}$, тогда для каждого $n\geqslant1$ точка B_n имеет координаты $(\frac{2n^2-2n+1}{2};\pm\frac{(2n-1)\sqrt{3}}{2})$ (знак ординаты зависит от положения треугольника относительно оси абсцисс и, как мы увидим далее, ни на что не повлияет). Уже сейчас видно, что абсцисса зависит от ординаты по квадратичному закону, поэтому точки B_n должны лежать на параболе, но мы убедимся в этом аналитически. Кроме того, уравнение параболы позволит нам быстро вычислить координаты ее вершины.

Итак, пусть $x=\frac{2n^2-2n+1}{2}$, $y=\pm\frac{(2n-1)\sqrt{3}}{2}$, тогда $n=\frac{3\pm2\sqrt{3}\cdot y}{6}$, откуда $x=\frac{2n^2-2n+1}{2}=\frac{1}{3}\cdot y^2+\frac{1}{4}$ после несложных преобразований. Очевидно, имеем уравнение параболы, симметричной относительно оси абсцисс.



Координаты ее вершины – $(\frac{1}{4};0)$, откуда требуемое расстояние от вершины до $A_1(0;0)$ равно $\frac{1}{4}$.

Критерии оценивания:

- задача решена неверно из-за ошибки в определении уравнения параболы и/или в вычислении координат ее вершины – 2 первичных балла;
- приведено верное решение, не содержащее доказательства $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$ – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 4. Имеется таблица 100×100 клеток, некоторые из которых отмечены. Всегда ли можно покрасить каждую отмеченную клетку в красный или синий цвет так, чтобы в каждом столбце и каждой строке таблицы было не более двух красных клеток, и при этом каждая синяя клетка располагалась в своей строке и/или столбце между двумя красными (необязательно соседними с ней)?

Решение. Выделим в каждой строке крайнюю левую и крайнюю правую отмеченные клетки, окрасив их в красный цвет. Если в строке есть только одна отмеченная клетка, она считается одновременно и левой, и правой. Все остальные отмеченные клетки окрасим в синий.

Продемонстрируем процесс перекраски клеток, приводящий к нужной раскраске.

Будем считать клетку хорошей, если она либо красная, либо находится между двумя красными клетками (в своей строке) и является синей. Раскраску отметок назовём допустимой, если все клетки являются хорошими. Очевидно, начальная раскраска уже удовлетворяет этому требованию.

Предположим, существует столбец, содержащий три или более красных клеток. Выберем одну из них, за исключением самой верхней и самой нижней, и применим следующую операцию:

- если это единственная красная клетка в строке, перекрасим её в синий;
- если клетка является левой красной в строке, она становится синей, а ближайшая справа отмеченная клетка становится красной (если до того не была таковой);
- если клетка является правой красной в строке, она становится синей, а ближайшая слева отмеченная клетка становится красной (если до того не была таковой).

Докажем, что после выполнения операции раскраска остаётся допустимой. Обозначим клетку, к которой применялась операция, как A.

Клетки, не находящиеся с A в одной строке или столбце, сохраняют свой статус хороших.

В столбце, где расположена A, остаётся как минимум одна красная клетка сверху и одна снизу, что гарантирует, что все клетки в этом столбце по-прежнему хорошие.

В строке, где находится A, все клетки, кроме неё самой, сохраняют свой статус. Что касается A, она остаётся хорошей, так как в её столбце остаются красные клетки выше и ниже.

Таким образом, все получаемые при перекраске раскраски остаются допустимыми.

Теперь докажем, что процесс перекрашивания не может продолжаться бесконечно. Рассмотрим для каждой строки количество клеток между красными и просуммируем эти числа (если в строке нет красных клеток, учтём ноль). Обозначим полученную сумму как S. В ходе операций S либо остаётся неизменным (когда единственная красная клетка в строке становится синей), либо уменьшается на 1. Так как S не может быть отрицательным и не может бесконечно оставаться неизменным, процесс перекраски обязательно завершится.

В итоге, когда перекрашивание закончится, в каждом столбце будет не более двух красных клеток. В любой момент процесса в строках также сохраняется не более двух красных клеток. Следовательно, итоговая раскраска удовлетворяет нужным условиям.

Критерии оценивания:

- приведен способ/алгоритм раскрашивания, но его доказательство отсутствует – 2 первичных балла;
- приведен способ/алгоритм раскрашивания, но его доказательство содержит ошибку – 3 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 5. Даны целые $m > 1$ и $n > 0$ и задано множество $A = \{0, 1, 2, \ldots, m^2 - 1\}$. Найдите количество многочленов $P(x)$ с коэффициентами из A, удовлетворяющих равенству $P(m) = n$.

Ответ: $\lfloor n/m \rfloor + 1$

Решение. Пусть $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, где $a_k \in A$ для всех k. Запишем a_k в виде $b_k \cdot m + c_k$ (т.е. в виде не более чем двузначного числа в системе счисления с основанием m), где $b_k, c_k \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$. Имеем

$$n = P(m) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k m^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k m^k = m \cdot t + \sum_{k=0}^{\infty} c_k m^k,$$

где $t = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k m^k$. Любое $0 \leqslant t \leqslant \lfloor n/m \rfloor$ можно единственным образом представить в виде $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k m^k$ (записать в системе счисления с основанием m), аналогично есть единственный способ записать $n - mt = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k m^k$.

Из сказанного следует, что можно установить взаимооднозначное соответствие между подходящими нам многочленами $P(x)$ и множеством $\{0, 1, \ldots, \lfloor n/m \rfloor\}$, в котором ровно $\lfloor n/m \rfloor + 1$ элементов.

Критерии оценивания:

- приведено представление многочлена в виде ряда по степеням m – 2 первичных балла;
- помимо условий на 2 первичных балла, доказана единственность указанного представления – 3 первичных балла;
- приведено верное решение, содержащее незначительные недочеты либо арифметические ошибки – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

10 класс

Задача 1. Есть два приведенных (то есть с коэффициентом 1 при старшей степени) многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ равных четных степеней с вещественными коэффициентами. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет вещественных корней. Какие из следующих уравнений имеют, а какие не имеют вещественные корни (хотя бы один корень)?

1. $P(x) = Q(x+1)$
2. $P(x+1) = Q(x+1)$
3. $P(x+2) = Q(x+1)$

Ответ: Уравнения 1 и 3 имеют хотя бы по одному вещественному корню каждое, а уравнение 2 не имеет ни одного вещественного корня.

Решение. Из условия следует, что $P(x) = x^{2n} + ax^{2n-1} + p(x)$, $Q(x) = x^{2n} + bx^{2n-1} + q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены степени не выше $2n-2$. Так как уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет вещественных корней, то и уравнение $P(x+1) = Q(x+1)$ не может иметь вещественных корней (так как мы имеем простую замену переменных). Поскольку $P(x) = Q(x)$ не имеет вещественных корней, имеем $a = b$ (иначе бы $P(x) - Q(x)$ был бы многочленом нечетной степени $2n-1$ и потому имел бы хотя бы один вещественный корень).

Рассмотрим уравнение $P(x) = Q(x+1)$ и «раскроем» все члены $(x+1)^k$, где $0 \leqslant k \leqslant 2n$, по формуле бинома:

$$Q(x+1) = (x+1)^{2n} + b(x+1)^{2n-1} + q(x+1) = (x^{2n} + 2nx^{2n-1} + r(x)) + b(x^{2n-1} + s(x)) + t(x) =$$

$$= x^{2n} + (2n+a)x^{2n-1} + u(x),$$

где $a = b$, многочлены $r(x), s(x), t(x), u(x)$ имеют степени не выше $2n-2$. Следовательно,

$$P(x) - Q(x+1) = (x^{2n} + ax^{2n-1} + p(x)) - (x^{2n} + (2n+a)x^{2n-1} + u(x)) = -2nx^{2n-1} + (p(x) - u(x))$$

– многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами и, следовательно, уравнение $P(x) = Q(x+1)$ имеет хотя бы один вещественный корень.

Уравнение $P(x+1) = Q(x)$ имеет вещественный корень, что доказывается из предыдущих рассуждений после «перестановки» P и Q, из чего после простой замены переменной следует существование вещественного корня уравнения $P(x+2) = Q(x+1)$.

Критерии оценивания:

- верное решение пункта 2 – 1 первичный балл;
- верное решение п.1 или п.3 – 2 первичных балла;
- верное решение двух из трех пунктов – 3 первичных балла;
- верное решение всех пунктов, но с незначительными ошибками, не влияющими на ход рассуждений – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение всех пунктов – 5 первичных баллов.

Задача 2. Множество всех целых положительных чисел разбили на два непересекающихся подмножества – A и B. Докажите, что для любого целого $n > 0$ найдутся такие целые $x > y > n$, что $\{x, y, x+y\} \subseteq A$ или $\{x, y, x+y\} \subseteq B$.

Решение. Пусть (без ограничения общности) множество A содержит конечное число элементов, наибольший из которых равен m. Тогда $\{m+1, m+2, 2m+3\} \subset B$, и условие задачи выполнено.

Теперь будем считать, что каждое из множеств A, B содержит бесконечное число элементов. Предположим, что существует такое целое $n > 0$, что для любых целых $x > y > n$ множество $\{x, y, x+y\}$ не содержится ни в A, ни в B. Выберем $a > b > c > n$ из множества A с условием $b - c > n$ (по предположению, $(b-c) \notin A$, иначе $\{b, b-c, c\} \subset A$), что возможно, поскольку A бесконечно. Тогда $\{a+b, b+c, c+a\} \subset B$ (иначе нарушается предположение), но тогда $(b-c) \notin B$, иначе $\{a+b, c+a, b-c\} \subset B$. Получили, что число $(b-c)$ не содержится ни в A, ни в B, что противоречит условию. Таким образом, исходное утверждение доказано.

Критерии оценивания:

- приведено решения для случая, когда одно из множеств A, B конечно – 2 первичных балла;
- приведено верное решение, содержащее незначительные недочеты – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 3. Бесконечная последовательность $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ строится следующим образом: $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, и для $n > 3$

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} + a_{n-3}$$

Докажите, что для любого целого $d > 0$ найдется член этой последовательности, кратный d.

Решение. Зафиксируем произвольное целое $d > 0$ и рассмотрим последовательность $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$, где b_i – остаток при делении члена a_i исходной последовательности на d для всякого $i = 1, 2, 3, \ldots$. Требуется доказать, что в последовательности $\{b_i\}_{i=1,2,3\ldots}$ встретится 0.

Заметим, что количество троек (b_i, b_{i+1}, b_{i+2}) бесконечно, при этом по каждой такой тройке можно однозначно определить как предыдущую (b_{i-1}, b_i, b_{i+1}), так и следующую тройку в последовательности, при этом количество различных троек конечно (их не более чем d^3), т.е. найдутся различные i, j, для которых

$$b_i = b_j; \quad b_{i+1} = b_{j+1}; \quad b_{i+2} = b_{j+2}.$$

Из вышесказанного следует, что последовательность $\{b_i\}$ является периодической. Дополняя ее элементом $b_0 = 0$ (т.к. $a_0 = a_3 - a_2 a_1 = 1 - 1 \cdot 1 = 0 \equiv 0 \pmod d$), делаем вывод, что $b_{|i-j|} = 0$ (для найденных ранее различных i, j), откуда $a_{|i-j|}$ кратно d, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания:

- показано, что по тройке остатков можно однозначно определить предыдущую и следующую тройку остатков – 1 первичный балл;
- показано, что последовательность является периодической – 2 первичных балла;
- полностью верное доказательство – 5 первичных баллов.

Задача 4. За один ход разрешается одновременно заменять все члены последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ действительных чисел на $|a - x_1|, |a - x_2|, |a - x_3|, \ldots, |a - x_n|$, соответственно (число a для разных ходов может быть разным). Докажите, что за конечное число ходов из любой начальной последовательности можно получить последовательность, состоящую только из нулей $(0, 0, 0, \ldots, 0)$, и найдите наименьшее число ходов, за которое гарантированно можно этого добиться для фиксированного n.

Ответ: n

Решение. Покажем, что n шагов *достаточно* для получения нулевой (т.е. состоящей только из нулей) последовательности. Будем обозначать $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ последовательность после k-го шага преобразований, и за $a^{(k)}$ будем обозначать значение a, выбранное на k-м шаге. Пусть $a^{(1)} = \frac{x_1+x_2}{2}$, тогда $x_1^{(1)} = x_2^{(k)} = \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$. Далее пусть $a^{(2)} = \frac{x_1^{(1)}+x_3^{(k)}}{2}$, тогда $x_1^{(2)} = x_2^{(2)} = x_3^{(2)} = \frac{1}{2}|x_1^{(1)} - x_3^{(1)}|$. Продолжая аналогично, на k-м маге выберем

$$a^{(k)} = \frac{x_1^{(k-1)} + x_{k+1}^{(k-1)}}{2},$$

тогда

$$x_1^{(k)} = x_2^{(k)} = \cdots = x_{k+1}^{(k)} = \frac{1}{2}|x_1^{(k-1)} - x_{k+1}^{(k-1)}|$$

для $k < n$. На n-м шаге выберем $a^{(n)} = x_1^{(n-1)}$ и получим последовательность из нулей.

Теперь покажем, что n шагов *необходимы* для некоторых начальных последовательностей, например, $1!, 2!, 3!, \ldots, n!$. Докажем это индукцией по n. База (для $n = 1$) тривиальна.
Индукционная гипотеза: пусть утверждение верно для некоторого целого $k \geqslant 1$, т.е. последовательность $1!, 2!, \ldots, k!$ невозможно свести к нулевой последовательности менее чем за k шагов. Докажем аналогичное для $k + 1$.

Отметим, что если m – наименьшее число шагов, необходимое для «обнуления» последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то $m^{(k-1)} \leqslant a^{(k)} < M^{(k-1)}$ для $k = 1, 2, \ldots, m$, где

$$m^{(k-1)} = min\{x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)}\}$$

$$M^{(k-1)} = max\{x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)}\}$$

Действительно, для $a^{(k)} < m^{(k-1)}$ и всех i имеем

$$x_i^{(k+1)} = |a^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = \big|a^{(k+1)} - |a^{(k)} - x_i^{(k-1)}|\big| = |x_i^{(k-1)} - a^{(k+1)} - a^{(k)}| = |x_i^{(k-1)} - (a^{(k+1)} + a^{(k)})|$$

На k-м шаге мы устанавливаем $a = a^{(k)} + a^{(k+1)}$ для «экономии шагов», что противоречит минимальности m.
С другой стороны, для $a^{(k)} > M^{(k-1)}$ и всех i имеем

$$x_i^{(k+1)} = |a^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = \big|a^{(k+1)} - |a^{(k)} - x_i^{(k-1)}|\big| = |-x_i^{(k-1)} - a^{(k+1)} + a^{(k)}| = |x_i^{(k-1)} - (a^{(k)} - a^{(k+1)})|$$

На k-м шаге мы устанавливаем $a = a^{(k)} - a^{(k+1)}$ для «экономии шагов», что опять противоречит минимальности m.

Итак, $M^{(0)} \geqslant M^{(1)} \geqslant \cdots M^{(m)}$, откуда $a^{(k)} \leqslant M^{(0)}$ для всех k. При этом из $m^{(k)} \geqslant 0$ следует $a^{(k)} \geqslant 0$ для всех k.

Из предположения, что последовательность $1!, 2!, \ldots, k!, (k+1)!$ можно «обнулить» за не более чем k шагов, следует, что последовательность $1!, 2!, \ldots, k!$ также обнулена этими шагами, причем для нее это количество шагов является минимальным (индукционная гипотеза). Из вышеизложенного следует, что $0 \leqslant a^{(i)} \leqslant k!$ для $i = 1, 2, \ldots, k$, но тогда

$$x_{k+1}^{(k)} = ||\cdots|(k+1)! - a^{(1)}| - a^{(2)}| - \cdots - a^{(k)}| = (k+1)! - (a^{(1)} + a^{(2)} + \cdots + a^{(k)}) \geqslant (k+1)! - k \cdot k! > 0,$$

что противоречит $x_{k+1}^{(k)} = 0$. Значит, последовательность $1!, 2!, \ldots, k!, (k+1)!$ невозможно обнулить k шагами, и потребуется как минимум $k + 1$ шаг, что завершает индукцию и решение задачи.

Критерии оценивания:

- приведено верное доказательство возможности получения последовательности нулей – 2 первичных балла;

- помимо верного доказательства возможности получения последовательности нулей, доказаны неравенства для a либо имеются иные значительные продвижения в решении – 3 первичных балла;
- приведено верное решение, содержащее незначительные недочеты – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 5. Точки A, B, C, D расположены на прямой в указанном порядке, причем $AB = 2$, $BC = 1$, $CD = c$. Найдите все положительные c, для каждого из которых найдется такая точка P (не лежащая на прямой AB), что PB, PC – трисектрисы (лучи, делящие угол на три равные части) угла $\angle APD$.

Ответ: $(3/5; +\infty)$

Решение. Ясно, что необходимо $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$.

Сначала рассмотрим вспомогательную конструкцию: пусть для фиксированных точек A, B и фиксированного положительного $k \neq 1$ требуется найти все точки X плоскости, для которых $\frac{AX}{BX} = k$. Зададимся системой координат, в которой $A(-a; 0)$ и $B(a; 0)$ для $a = \frac{1}{2}|AB|$; $X(x; y)$. Тогда $\frac{AX^2}{BX^2} = k^2 = \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}$, откуда

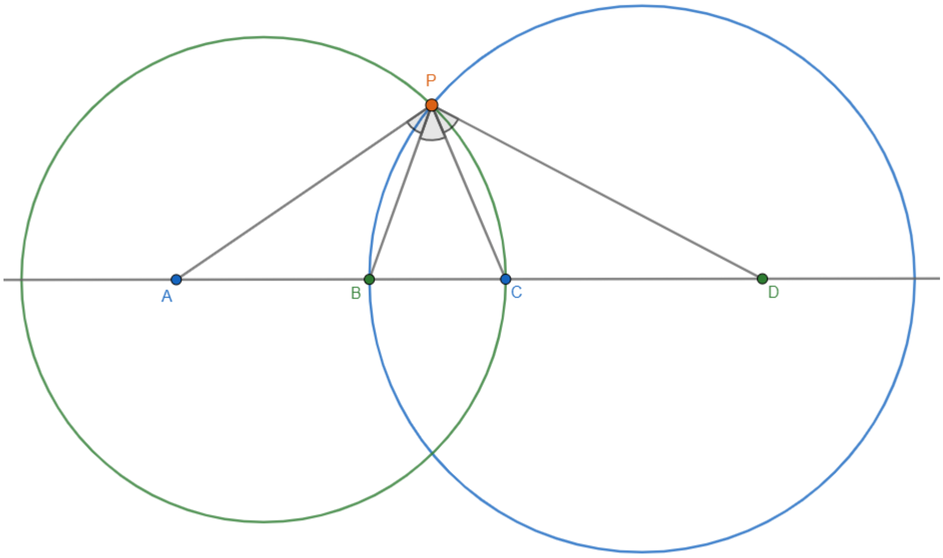
$$\left(x + \frac{k^2+1}{k^2-1} \cdot a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2ka}{k^2-1}\right)^2$$

– уравнение окружности, называемой *окружностью Аполлония* точек A, B, и ее радиус равен $\frac{k \cdot |AB|}{|k^2-1|}$. Заметим, что для $k > 1$ точка A находится вне этой окружности, а точка B – внутри нее.

Теперь докажем еще одно утверждение: если Ω – окружность Аполлония точек A, B, и Ω пересекает отрезок AB в точке C, то для любой точки $P \in \Omega$ выполнено $\angle APC = \angle BPC$, т.е. PC – биссектриса угла APB. Это утверждение очевидно, если вспомнить свойство биссектрисы о делении ею противоположной стороны треугольника, и если заметить, что точка C лежит на Ω, из чего следует $\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC}$, после чего остается только вспомнить указанное свойство (в данном случае мы используем его как признак).

Вернемся к задаче. Ввиду доказанного выше, необходимо, чтобы окружности Аполлония для A, C ($k_1 = \frac{AB}{BC} = 2 > 1$, $R_1 = 2$) и D, B ($k_2 = \frac{CD}{BC} = c$) имели две общие точки (поскольку центры окружностей лежат на прямой AB, единственная общая точка этих окружностей лежала бы на этой же прямой). Ясно, что если $c > 1$, то точка B лежит внутри второй окружности, тогда две окружности пересекаются. Если $c = 1$, то точка P лежит на срединном перпендикуляре к BD, который пересекает первую окружность ввиду $R_1 = 2 > 1$.

Если же $0 < c < 1$, то для пересечения окружностей необходимо и достаточно $2R_1 - 2R_2 < BC = 1$, откуда ввиду $R_2 = \frac{c}{1-c}$ получим $c > \frac{3}{5}$.



Критерии оценивания:

- задача сведена к поиску пересечений окружностей Аполлония – 2 первичных балла;
- доказано, что все $c > 1$ подходят – 3 первичных балла;
- верно и обоснованно найдены $c \in (3/5; 1) \cup (1; +\infty)$, но упущено либо неверно обосновано $c = 1$ – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

11 класс

Задача 1. Пусть D – некоторое фиксированное непустое множество, а $f(x, y)$ – функция двух переменных, принимающих значения из D. Известно, что

1. $f(x, f(y, z)) = f(f(x, z), y)$ для любых $x, y, z \in D$,
2. для любых значений $x, z \in D$ существует такое $y \in D$, что $f(x, y) = z$.

Докажите, что существует такое $t \in D$, что $f(t, x) = x$ для всех $x \in D$.

Решение. Сначала докажем, что $f(x, y) = f(y, x)$ для любых $x, y \in D$. Согласно свойству 2, для x и y существует такое d, что $f(x, d) = y$; тогда $f(x, y) = f(x, f(x, d)) =$ (в силу свойства 1) $= f(f(x, d), x) = f(y, x)$. Доказано.

Далее, пусть p – произвольный элемент D; согласно свойству 2, существует такое $t \in D$, что $f(p, t) = p$. Для этого t и произвольного $x \in D$ имеем $f(t, x) = f(t, f(p, c))$, где c таково, что $f(p, c) = x$ (см. свойство 2); тогда $f(t, x) = f(t, f(p, c)) =$ (в силу доказанного выше) $= f(t, f(c, p)) =$ (в силу свойства 1) $= f(f(t, p), c) =$ (в силу доказанного выше) $= f(f(p, t), c) = f(p, c) = x$ (так как $f(p, c) = x$), что и требовалось доказать.

Критерии оценивания:

- доказана коммутативность функции – 2 первичных балла;
- приведено верное решение, содержащее незначительные недочеты – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 2. Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_{2025}$ – неотрицательные числа, и

$$(x + b_1)(x + b_2) \cdots (x + b_{2025}) = a_{2025}x^{2025} + a_{2024}x^{2024} + \cdots + a_1x + a_0$$

Докажите, что $a_i^2 \geqslant a_{i-1}a_{i+1}$ для любого $i = 1, 2, 3, \ldots, 2024$.

Решение. Докажем индукцией более общее утверждение:
Для любого целого $n \geqslant 2$, если $b_1, \ldots, b_n$ неотрицательны и $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = (x + b_1) \cdots (x + b_n)$, то $a_i^2 \geqslant a_{i-1}a_{i+1}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

База индукции ($n = 2$): в таком случае $a_2 = 1, a_1 = b_1 + b_2$ и $a_0 = b_1b_2$, а значит $a_1^2 = b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2 \geqslant b_1b_2 = a_0a_2$ – доказано.

Индукционная гипотеза: пусть для некоторого $n \geqslant 2$ и любых неотрицательных $b_1, \ldots, b_n$, если $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = (x + b_1) \cdots (x + b_n)$, то $a_i^2 \geqslant a_{i-1}a_{i+1}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Шаг индукции: рассмотрим многочлен $(x + b_1) \cdots (x + b_n)(x + b)$, где $b \geqslant 0$. Имеем

$$(x + b_1) \cdots (x + b_n)(x + b) = (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0)(x + b) =$$

$$= a_nx^{n+1} + (a_nb + a_{n-1})x^n + (a_{n-1}b + a_{n-2})x^{n-1} + \cdots + (a_2b + a_1)x^2 + (a_1b + a_0)x + a_0b$$

Для завершения индукционного шага достаточно рассмотреть (доказать) три неравенства:

1. $(a_nb + a_{n-1})^2 \geqslant a_n(a_{n-1}b + a_{n-2})$;
2. $(a_1b + a_0)^2 \geqslant a_0b(a_2b + a_1)$;
3. $(a_ib + a_{i-1})^2 \geqslant (a_{i+1}b + a_i)(a_{i-1}b + a_{i-2})$ для всех $i = 2, \ldots, n - 1$.

Рассмотрим их по порядку:

1. $(a_nb+a_{n-1})^2 = a_n^2b^2+2a_na_{n-1}b+a_{n-1}^2 \geqslant a_na_{n-1}b+a_{n-1}^2 \geqslant$ (индукционная гипотеза) $\geqslant a_na_{n-1}b+a_na_{n-2} = a_n(a_{n-1}b + a_{n-2})$.

2. $(a_1b + a_0)^2 = a_1^2b^2 + 2a_1a_0b + a_0^2 \geqslant$ (индукционная гипотеза) $\geqslant a_2a_0b^2 + a_1a_0b = a_0b(a_2b + a_1)$.

3. Пусть теперь $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ – произвольное целое число. Раскроем скобки в левой части неравенства: $(a_ib+a_{i-1})^2 = a_i^2b^2+2a_ia_{i-1}b+a_{i-1}^2$. Раскроем скобки в правой части неравенства: $(a_{i+1}b + a_i)(a_{i-1}b + a_{i-2}) = a_{i+1}a_{i-1}b^2 + (a_{i+1}a_{i-2} + a_ia_{i-1})b + a_ia_{i-2}$.

   По предположению индукции первое слагаемое из левой части неравенства не меньше первого слагаемого из правой части неравенства: $a_i^2b^2 \geqslant a_{i+1}a_{i-1}b^2$. Аналогично, последнее слагаемое из левой части неравенства не меньше последнего слагаемого из правой части неравенства: $a_{i-1}^2 \geqslant a_ia_{i-2}$.

   Теперь сравним средние слагаемые в левой и правой частях неравенства: очевидно, что для этого достаточно сравнить a_ia_{i-1} и $a_{i+1}a_{i-2}$. Для этого умножим обе величины на a_ia_{i-1}: $(a_ia_{i-1})^2 = a_i^2a_{i-1}^2 \geqslant$ (индукционная гипотеза) $\geqslant (a_{i+1}a_{i-1})(a_ia_{i-2}) = (a_{i+1}a_{i-2})(a_ia_{i-1})$. Следовательно, $a_ia_{i-1} \geqslant a_{i+1}a_{i-2}$, что завершает доказательство.

Шаг индукции доказан, а вместе с ним и утверждение, обощающее утверждение задачи.

Критерии оценивания:

- приведена плодотворная идея, но ее реализация либо отсутствует, либо содержит существенную ошибку – 1 первичный балл;
- доказана база индукции, но нет доказательства шага индукции – 2 первичных балла;
- доказана база индукции, но доказательство шага индукции приведено только для некоторых a_i; либо реализована иная плодотворная идея, но с существенной ошибкой – 3 первичных балла;
- приведено верное решение, содержащее незначительные недочеты – 4 первичных балла;
- полностью верное и обоснованное решение – 5 первичных баллов.

Задача 3. В стране N есть 10 городов, каждая пара которых соединена двусторонним авиамаршрутом, который обеспечивается одной из двух авиакомпаний. Докажите, что одна из этих авиакомпаний может предложить своим пассажирам два циклических маршрута, каждый из которых проходит по нечетному числу городов, причем ни один город не является частью обоих маршрутов.

Решение. Построим граф (K_{10}), вершины которого – города, а ребра – авиамаршруты между городами. Будем красить ребра в красный и синий цвета в зависимости от того, какой авиакомпании принадлежит соответствующий маршрут. Требуется доказать, что в построенном графе существуют два непересекающихся нечетных цикла одного цвета.

Лемма 1. Если каждое ребро полного графа K_6 (граф с 6-ю вершинами, каждая пара из которых соединена ребром) покрасить в один из двух цветов, то найдется треугольник (цикла длины 3), все стороны (ребра) которого имеют один цвет.

Доказательство. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_6$ – вершины графа. Если ребра v_iv_j и v_iv_k окрашены в один цвет, то будем считать, что в этот цвет окрашен «угол» $v_jv_iv_k$. Пусть r_i, b_i – количества соответственно красных и синих ребер, выходящих из вершины v_i, тогда $r_i + b_i = 5$ (для всех i) и общее число окрашенных углов

$$\sum_{i=1}^{6} \left(C_{r_i}^2 + C_{b_i}^2\right) \geqslant \sum_{i=1}^{6} \left(C_2^2 + C_3^2\right) = 24$$

С другой стороны, в каждом «одноцветном» треугольнике все три угла должны быть окрашены в один цвет, а в каждом «неодноцветном» треугольнике есть только один окрашенный угол.

Всего есть $C_6^3 = 20$ треугольников, и пусть m из них одноцветны, тогда $3m + (20 - m) \geqslant 24$, откуда $m \geqslant 2 > 1$, *что завершает доказательство леммы 1.*

Лемма 2. Если каждое ребро полного графа K_5 (граф с 5-ю вершинами, каждая пара из которых соединена ребром) покрасить в один из двух цветов, и в этом графе нет одноцветного треугольника (цикла длины 3, все ребра которого окрашены в один цвет), то в этом графе есть два непересекающихся (не имеющих общих ребер) цикла, каждый из которых окрашен в один цвет и имеет длину 5.

Доказательство. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_5$ – вершины графа. Рассмотрим ребра $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_1v_5$ – если три из них имеют один и тот же цвет, то найдется одноцветный треугольник, что противоречит условию: действительно, пусть v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4 – красные, тогда все ребра v_2v_3, v_3v_4, v_4v_2 должны быть синими (иначе получим красный треугольник), но тогда мы имеем синий треугольник. Итак, из каждой вершины выходят по два красных и два синих ребра.

Рассмотрим граф, состоящий из 5 вершин и только красных ребер – в таком графе степень каждой вершины равна 2, а значит, он либо является циклом длины 5, либо разбивается на меньшие циклы. Если разбить граф на 5 вершинах степени 2 на меньшие циклы, то либо получим цикл из 1 вершины (в наших условиях это невозможно), либо одноцветный треугольник, что также исключено (см. выше). Итак, граф на красных ребрах – цикл длины 5, аналогичный вывод делаем для графа на синих ребрах. *Лемма 2 доказана.*

Вернемся к задаче: пусть $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ – вершины графа K_{10} и пусть $v_1v_2v_3$ – одноцветный треугольник в нем (его существование следует из Леммы 1). В графе $K_{10} \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$ также есть одноцветный треугольник, т.к. количество его вершин не меньше 6 (даже 7) – пусть это треугольник $v_4v_5v_6$. Если эти треугольники окрашены в один цвет, то решение завершено. Если же нет (допустим, $v_1v_2v_3$ – синий, а $v_4v_5v_6$ – красный), то рассмотрим ребра v_iv_j для $i = 1, 2, 3$, $j = 4, 5, 6$ – всего 9 ребер и, согласно принципу Дирихле, среди них найдутся 5 ребер одного цвета (без ограничения общности будем считать, что синего). Тогда для некоторого $k \in \{4, 5, 6\}$ найдутся два синих ребра из тройки v_1v_k, v_2v_k, v_3v_k, т.е. мы имеем один синий и один красный треугольники с общей вершиной v_k.

Итак, «угол» $v_1v_2v_3$ – синий, а «угол» $v_3v_4v_5$ – красный. Рассмотрим граф $K_{10} \setminus \{v_1, v_2v_3, v_4, v_5\} = K_5$. Если в нем есть одноцветный треугольник, то решение завершено: берем его и соответствующий ему по цвету $v_1v_2v_3$ или $v_3v_4v_5$. Если в K_5 нет одноцветного треугольника, то, согласно Лемме 2, в ней найдутся два разноцветных цикла длины 5 – в этом случае берем нужный из этих циклов в качетсве второго циклического маршрута. Доказательство утверждения задачи завершено.

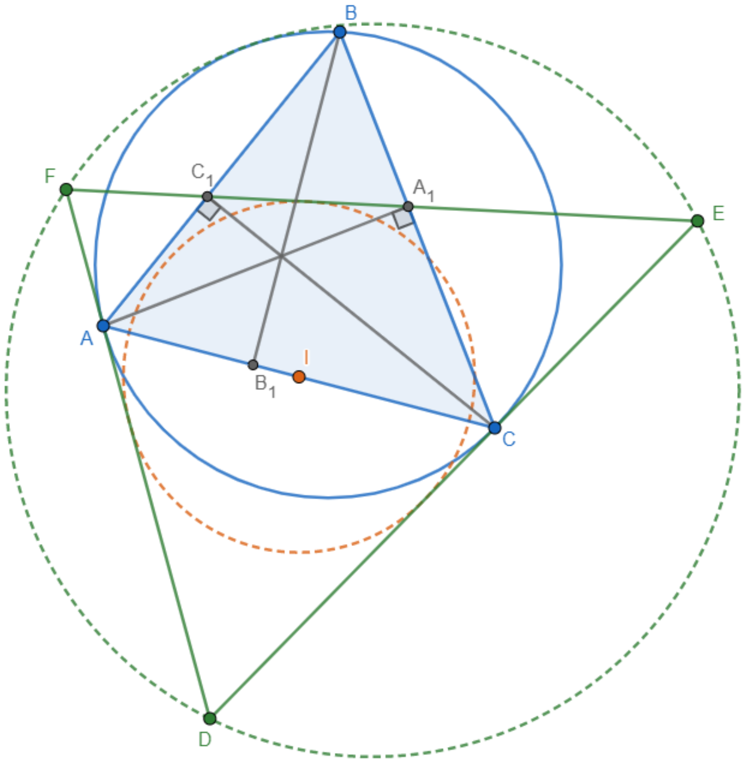
Критерии оценивания:

- доказаны вспомогательные леммы либо использована теорема Рамсея – 2 первичных балла;
- приведено в целом верное решение, но допущена незначительная ошибка в рассуждениях – 3 первичных балла;
- полностью верное доказательство – 5 первичных баллов.

Задача 4. Дан остроугольный треугольник ABC, около которого описана окружность Ω и в котором проведены высоты AA_1, CC_1. Касательные к Ω, проведенные в точках A и C, пересекаются в точке D, и прямая A_1C_1 пересекает прямые CD, AD в точках E, F, соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника DEF касается Ω.

Решение. Пусть B_1 – основание высоты $\triangle ABC$, проведенной из точки B, а I – середина AC. Заметим, что $\angle FAC_1 = \angle ACB = \angle AC_1B_1$, откуда $B_1C_1 \parallel AF$, аналогично и $A_1B_1 \parallel CE$. Из $\angle AC_1F = \angle A_1C_1B = \angle ACB = \angle FAC_1$ следует $FA = FC_1$, откуда ввиду $IA = IC_1$ имеем

$\triangle AIF = \triangle C_1IF$, из чего следует, что FI – биссектриса угла DFE. Аналогично получаем, что EI – биссектриса угла DEF, т.е. I – центр вписанной окружности $\triangle DEF$.



Вспомним одно замечательное утверждение: *отрезок, соединяющий точки касания полувписанной окружности треугольника с его сторонами, содержит центр вписанной окружности этого треугольника.* Очевидно, верно и обратное: *если окружность касается двух сторон треугольника так, что отрезок, соединяющий точки касания, содержит центр вписанной окружности этого треугольника, то первая окружность является полувписанной* (т.е. касается двух сторон треугольника и его описанной окружности).

В нашей задаче окружность Ω касается сторон треугольника DEF в точках A, C, причем отрезок AC, как было доказано ранее, содержит центр I вписанной окружности треугольника DEF – значит, Ω является полувписанной окружностью треугольника DEF, т.е. касается его описанной окружности, что и требовалось доказать.

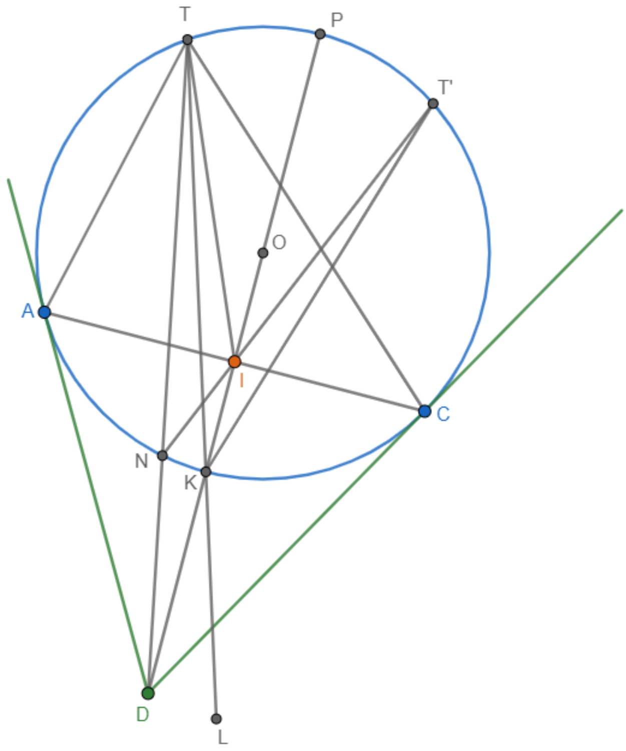
Теперь докажем использованное утверждение, называемое леммой Веррьера:
Отрезок, соединяющий точки A, C касания полувписанной окружности Ω треугольника DEF с его сторонами, содержит центр вписанной окружности этого треугольника.

Доказательство этого утверждения приводится в образовательных целях, и от участников Олимпиады оно не требовалось: достаточно было упомянуть соответствующее свойство полувписанной окружности.

Доказательство проведем в несколько этапов.

Утверждение 1. Дан треугольник ACT, около которого описана окружность Ω, прямые AD, CD – касательные к этой окружности, I – середина AC. Тогда прямая TD симметрична прямой TI относительно биссектрисы угла $\angle ATC$, т.е. содержит симедиану $\triangle ACT$, проведенную из вершины T.

Доказательство. Пусть PK – диаметр Ω, перпендикулярный AC (см. рис.), и точка T' симметрична точке T относительно PK. Отложим $\angle NIK$ (N лежит на Ω), равный $\angle TIP$ в одной с ним полуплоскости относительно PK. Ввиду $\angle T'IP = \angle TIP = \angle NIK$ получим, что точка N лежит на прямой $T'I$. Далее $\angle ITK = \angle IT'K = \angle NT'K = \angle NTK$, т.е. прямая TN содержит симедиану $\triangle ACT$, поскольку TK – биссектриса $\angle ATC$ ввиду равенства дуг AK и CK.



Пусть O – центр Ω. Четырехугольник $TOIN$ – вписанный, поскольку $\angle INT = \angle T'NT = \frac{1}{2}\angle T'OT = \angle TOP = 180^\circ - \angle TOI$. Осталось заметить, что при инверсии относительно Ω описанная окружность четырехугольника $TOIN$ перейдет в прямую TN, а точка I перейдет в точку D – значит, точки T, N, D лежат на одной прямой, т.е. TD содержит симедиану, что и требовалось доказать.

Утверждение 2 («лемма Архимеда»). Пусть A_2, C_2 – соответственно середины меньших дуг DF, DE описанной окружности треугольника DEF. Тогда точки A_2, C_2 лежат на прямых TA, TC, соответственно.

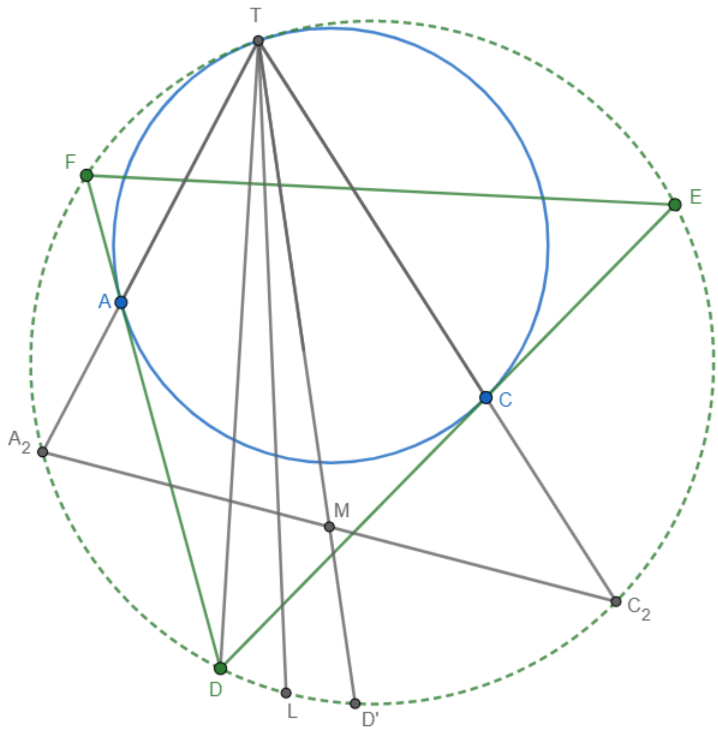
Доказательство. Очевидно, касательная к описанной окружности $\triangle TA_2C_2$, проведенная в точке A_2, параллельна DF. Значит, гомотетия с центром T, переводящая окружность Ω в описанную окружность $\triangle TA_2C_2$, переводит прямую DF в упомянутую касательную, а точку A касания Ω с DF – в точку A_2, т.е. точки T, A, A_2 лежат на одной прямой. Аналогично доказывается для точек T, C, C_2.

Утверждение 3. Прямая TD содержит симедиану треугольника A_2C_2T, проведенную из вершины T (здесь T – точка касания описанных окружностей $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$, т.к. первая из них является полувписанной для $\triangle DEF$).

Доказательство. Достаточно провести гомотетию, переводящую описанную окружность треугольника ACT в описанную окружность треугольника A_2C_2T. Утверждение доказано.

Утверждение 4. Пусть D' – середина дуги EF (не содержащей T) описанной окружности треугольника DEF. Тогда прямая TD' содержит медиану TM треугольника A_2C_2T.

Доказательство. Пусть L – середина дуги A_2C_2 (не содержащей T) описанной окружности треугольника DEF, тогда TL – биссектриса $\angle A_2TC_2$.



Ввиду равенства дуг ED' и FD' имеем следующее равенство для дуг: $ED - DD' = DF + DD'$, откуда $ED = DF + 2 \cdot DD'$ и $EC_2 = FA_2 + DD' = FA_2 + DL + LD'$. Далее из $A_2L = C_2L$ получаем $A_2D + DL = C_2D - DL = EC_2 - DL$, т.е. $EC_2 = A_2D + 2 \cdot DL = FA_2 + 2 \cdot DL =$ (как отмечено выше) $= FA_2 + DL + D'L$, откуда получаем равенство дуг DL и $D'L$, т.е. прямая TD' симметрична (относительно биссектрисы TL) прямой TD, содержащей симедиану, т.е. прямая TD' содержит медиану $\triangle A_2C_2T$, проведенную из вершины T, что и требовалось доказать.

Утверждение 5. Пусть J – центр окружности, вписанной в $\triangle DEF$. Тогда точка J лежит на прямой TD'.

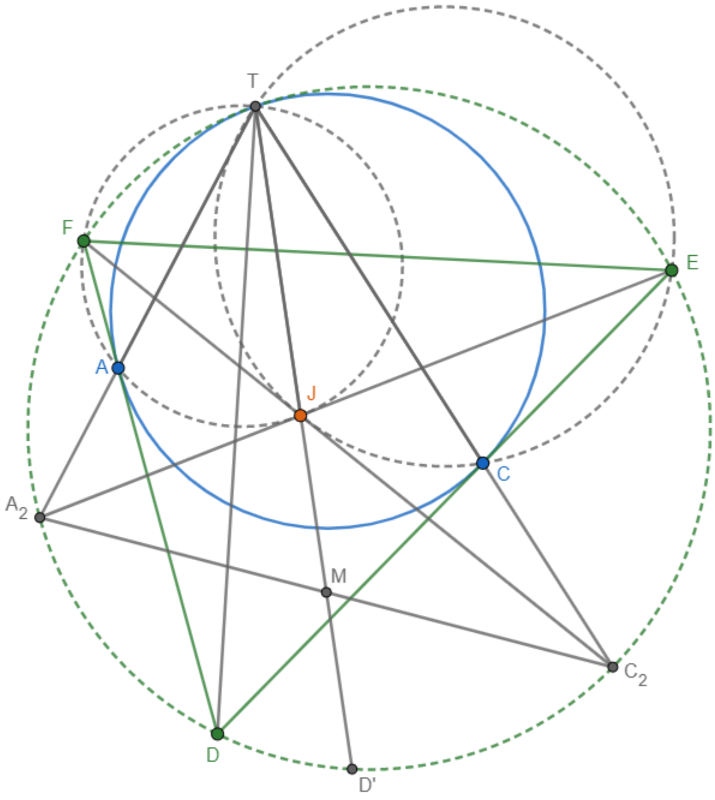
Доказательство. Из равенства дуг C_2D' и DA_2 следует равенство дуги C_2D' и FA_2, т.е. $A_2D' \parallel FC_2$, аналогично и $C_2D' \parallel EA_2$, т.е. A_2JC_2D' – параллелограмм. Поскольку точка M – середина его диагонали A_2C_2, то и диагональ JD' проходит через точку M, т.е. точки J, M, D' лежат на одной прямой, а поскольку на прямой MD' лежит точка T, получаем требуемое.

Утверждение 6. Четырехугольники $TECJ$, $TFAJ$ – вписанные, и прямые FC_2, EA_2 соответственно касаются их описанных окружностей.

Доказательство. Из равенства дуг C_2D' и DA_2 следует $\angle CEA_2 = \angle CTJ$, и четырехугольник $TECJ$ – вписанный. Аналогично, вписанным является и $TFAJ$. Далее для дуг имеем $ED' = EC_2 + FA_2$, откуда $\angle ETD' = \angle C_2JE$, после чего применением обратной теоремы об угле между касательной и хордой получаем требуемое. Для четырехугольника $TFAJ$ и прямой EA_2 доказывается аналогично.

Наконец,

Утверждение 7. Точка J совпадает с точкой I.



Доказательство. Из доказанного ранее следует $\angle C_2JC = \angle CEJ = \angle FEJ = \angle FTA_2 = \angle FJA$, т.е. точки F, J, C_2 лежат на прямой. Аналогично и точки E, J, A_2 лежат на прямой, т.е. точка J лежит на AC и, как было доказано ранее, на TD', – значит, она совпадает с точкой I, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания:

- есть продвижения в решении задачи – 1 первичный балл;
- использовано и упомянуто (но не обязательно доказано), что центр I вписанной в $\triangle DEF$ окружности лежит на AC – 3 первичных балла;
- полностью верное доказательство – 5 первичных баллов.

Задача 5. Даны целое $a > 0$, не являющееся целой степенью числа 10, и целое $b > 0$. Верно ли, что существует такое целое $n > 0$, что в десятичной записи числа a^n встречается десятичная запись числа b? *Например, для* $a = 2$ *и* $b = 19$ *можно выбрать* $n = 13$, *т.к.* $2^{13} = 8192$, *в записи которого есть* 19.

Ответ: да, верно.

Решение. Докажем, что для любого целого $a \geqslant 2$ $(a \neq 1 = 10^0)$ и любого целого $b > 0$ найдется целое $n > 0$, для которого десятичная запись числа a^n начинается с последовательно записанных цифр числа b – иными словами, найдутся такие целые положительные m, n, что

$$10^m \cdot b < a^n < 10^m \cdot (b+1)$$

Прологарифмируем последнее двойное неравенство с основанием 10:

$$m + \lg b < n \cdot \lg a < m + \lg(b+1)$$

$$\lg b < n \cdot \lg a - m < \lg(b+1)$$

Докажем, что $\lg a$ иррационально: если это не так, то $\lg a = \frac{p}{q}$ для некоторых целых положительных взаимно простых p, q, тогда $10^p = a^q$, что невозможно. Итак, $\lg a$ иррационально.

Для завершения решения задачи можно доказать, что для любого иррационального $x > 0$ и любого выбранного интервала (u, v) $(0 < u < v)$ найдутся такие целые положительные m, n, что

$$u < nx - m < v$$

Заметим, что для любого целого $n > 0$ можно выбрать такое целое $m_n > 0$, что $0 < nx - m_n < 1$. Пусть $k = \lceil \frac{1}{v-u} \rceil$, т.е. отрезок $[0; 1]$ можно разбить на k равных отрезков, длина каждого из которых будет меньше длины интервала (u, v). Рассмотрим бесконечный набор чисел $x - m_1$, $2x - m_2$, $3x - m_3, \ldots$ и выберем из него два числа, попадающие в один и тот же из упомянутых k отрезков – пусть это числа $ix - m_i$ и $jx - m_j$ (без ограничения общности будем считать, что первое меньше второго). Тогда $jx - m_j - (ix - m_i) = t \in (0; 1/k)$.

Для найденного t рассмотрим числа $t, 2t, 3t, \ldots$ – ввиду $t < 1/k$ среди них найдется число, лежащее на интервале (u, v), что и требовалось доказать.

Осталось заметить, что в условиях нашей задачи $x = \lg a$ – иррациональное положительное число; $(u, v) = (\lg b, \lg(b + 1))$ – положительный интервал (если $b = 1 \Rightarrow \lg b = 0$, то в качестве u можно выбрать любое число из интервала $(0; \lg(b+1))$). Итак, найдутся такие целые положительные m, n, что $\lg b < n \cdot \lg a - m < \lg(b + 1)$, т.е. десятичная запись числа a^n будет начинаться с цифр числа b.

Критерии оценивания:

- использована идея иррациональности $\lg(a)$ – 1 первичный балл;
- в том или ином виде используется идея, что для любого иррационального $x > 0$ и любого выбранного интервала (u, v) найдутся такие целые положительные m, n, что $u < nx - m < v$ – 3 первичных балла;
- верное решение, содержащее незначительные ошибки – 4 первичных балла;
- полностью верное доказательство – 5 первичных баллов.