# СБОРНИК ЗАДАНИЙ

Международной олимпиады «Innopolis Open»
по профилю

«МАТЕМАТИКА»
2018 - 2023 учебные года

УДК
ББК

Сборник заданий международной олимпиады «Innopolis Open» по профилю «Математика» 2018 - 2023 учебные года/ Составители: Бебчук Д.Е., Шилов Н.В., Бибиков П.В., Гаврилюк А.А., Киселев О.М., Климчик А.С., Бродский Д.Ю., Меньщиков А.Б., Соловьев Р.Ю., Макарова А.О., Статкевич И.А.; - 1-е изд.

ISBN

Разработанный командой университета Иннополис сборник заданий для подготовки к международной олимпиаде «Innopolis Open» по профилю «Математика», в котором учтен восьмилетний опыт проведения олимпиады и сотрудничества с ведущими экспертами в данной области.

Основу сборника составили материалы и задачи по математике, работа над которыми выведет вас за рамки простой подготовки к олимпиаде за счет оригинального контента, позволяющего глубоко погрузиться в решение инженерных задач, рассмотреть и усвоить эталонные и оптимальные способы их решения, расширяя привычные горизонты вашего интеллекта. В Сборник включены задания отборочных испытаний и заключительного этапа олимпиады «Innopolis Open» за несколько лет.

Рекомендован учащимся 7–11 классов, абитуриентам, школьным учителям, наставникам, а также всем интересующимся техническими дисциплинами.

УДК

ББК

ISBN

## СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ К СБОРНИКУ

Современные требования к организации обучения школьников согласно Концепции модернизации образования в Российской Федерации направлены на развитие творческой, социально-активной личности, на выявление ее познавательных интересов и потребностей, на активизацию познавательной самостоятельности обучаемых. Нынешнее поколение растет в активно меняющемся обществе, поэтому важнейшей проблемой является подготовка молодёжи к принятию собственных решений, не потеряв при этом своей личностной самобытности, нравственных принципов, способности к самопознанию и самореализации.

Одной из главных социальных задач государства и общества является создание условий, обеспечивающих выявление и развитие способных и одаренных детей, реализацию их допустимых возможностей. Одним из важнейших направлений национального проекта «Образование» является поддержка одаренной и талантливой молодежи. Реализация данного проекта позволит создать комплексную систему поиска, поддержки и сопровождения на протяжении всего периода становления личности талантливых детей.

Олимпиады из перечня Российского союза олимпиад школьников (далее – РСОШ) являются одной из наиболее распространенных форм работы с одаренными детьми в Российской Федерации.

Ежегодно проводятся 82 олимпиады из перечня РСОШ более чем по 250 профилям, что способствует выявлению одаренных обучающихся, имеющих интерес и склонности к различным предметным дисциплинам. Изначально проведение олимпиад было направлено на развитие интереса учащихся к школьным дисциплинам. В настоящее время роль олимпиад возросла в связи с введением единого государственного экзамена и новыми правилами приема в высшие учебные заведения. Успешно выступившие на олимпиадах обучающиеся имеют преимущества при поступлении в престижные вузы не только своего региона, но и во все высшие учебные заведения, расположенные на территории Российской Федерации – а это в свою очередь повышает статус всего олимпиадного движения.

Через олимпиады высшие учебные заведения могут предъявлять новые требования к содержанию и качеству образования, формам и методам учебной работы как одни из основных заказчиков системы общего образования. Подготовка к олимпиаде и участие в ней оказывается весьма полезной не только в плане углубления знаний по предмету. Успешное выступление на олимпиаде требует высокого уровня интеллектуальной зрелости, развития устной и письменной речи, контактности, способности ориентироваться в незнакомой ситуации и быстро оценивать новую информацию, умения сконцентрироваться на выполнении поставленной задачи, готовности быстро принимать решения в стрессовой ситуации.

В отличие от конкурсов, написания рефератов или исследовательских работ, олимпиады охватывают более широкий круг знаний по тому или иному школьному курсу и способствуют формированию кругозора, к чему так стремиться любой учитель. Дети, увлеченные той или иной предметной дисциплиной, не должны откладывать работу на завтра. Им нужно уже сегодня пробовать свои силы в достаточно серьезных испытаниях.

Олимпиада – это проверенный способ выявить детей, имеющих выдающиеся способности, мотивировать их и дать им возможность для дальнейшего развития и реализации этих способностей. Возможности, предоставляемые школьникам олимпиадой – это, прежде всего, возможность получить новые знания, определить и развить свои способности и интересы, приобрести самостоятельность мышления и действия, проявить себя.

Все эти перспективы могут быть достигнуты только при наличии развитой системы подготовки школьников к олимпиадам. Самое главное – создать равные условия и возможности для каждого обучающегося.

Олимпиадное движение сегодня – одно из важнейших направлений в работе с одаренными детьми. Участие в олимпиадном движении для обучающихся, очень важно, ведь оно способствует их самореализации, расширяет и углубляет знания в определенной предметной области, позволяет выбрать будущею профессию, получить привилегии при поступлении в высшие учебные заведения России.

Университет Иннополис активно включён в данное направление через организацию международной олимпиады «Innopolis Open», которая проводится по нескольким профилям, в том числе и по профилю «Математика».

Профиль «Математика» международной олимпиады «Innopolis Open» проводится Университетом Иннополис с 2024/2015 учебного года за это время в нем приняло участие более 16000 школьников из разных регионов России, стран СНГ и дальнего зарубежья.

## Об Университете Иннополис

Автономная некоммерческая организация высшего образования «Университет Иннополис» (далее – ВУЗ, Университет) – российский университет, основанный в 2012 году, специализируется на предоставлении образовательных услуг и научных исследованиях в области информационных технологий и робототехники. Среди основных целей создания университета – подготовка высококвалифицированных специалистов по направлениям бакалавриата, магистратуры, аспирантуры (09.03.01, 09.04.01, 09.06.01; 1.2.2.) в области IT-сферы и робототехники, способных формировать принципиально новый высокий уровень возможностей и ликвидации ее кадрового дефицита. 17 профильных лабораторий университета Иннополис и 9 специализированных Центров (в том числе лаборатории машинного обучения и предоставления данных, сетей и блокчейн-технологий, интеллектуальных робототехнических систем, исследовательский центр в сфере искусственного интеллекта, центр информационной безопасности и др.) регулярно предоставляют актуальную информацию и собственные наработки, используемые методистами университета при составлении и мониторингу заданий «Innopolis Open». Обучение бакалавров осуществляется по направлениям «Информатика и вычислительная техника» и «Анализ данных и искусственный интеллект»; магистры проходят подготовку по направлениям: «Управление разработкой программного обеспечения», «Робототехника и компьютерное зрение», «Компьютерная безопасность и сети», «Анализ данных и искусственный интеллект» и «Технологическое предпринимательство»; аспиранты повышают квалификацию по шифру научной специальности и профилю подготовки; 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

На данный момент более 150 научно-педагогических сотрудников университета, среди которых немало иностранных специалистов, осуществляют научную и образовательную деятельность, являясь сотрудниками актуальных лабораторий и центров.

Будучи одним из крупнейших центров взаимодействия науки и бизнеса, Университет привлекает большое количество предпринимателей, инвесторов, молодых специалистов, студентов и школьников, связавших свою жизнь с IT технологиями и робототехникой, совершенствующихся в областях современной образовательной парадигмы, расширяющейся практическим применением научных инноваций на основе уникальных ресурсов и контента разных профилей, определяющих и диссеминирующих передовые мировые практики в соответствующих областях. Вокруг Университета формируется современная инфраструктура, учитывающая все требования, необходимые для комфортного проживания, обучения, развития в таких областях деятельности, как предпринимательство, наука, техника, акселерация стартап-проектов, венчурное инвестирование и т.д.

## О Международной Олимпиаде «Innopolis Open»

Международная Олимпиада «Innopolis Open» (далее – Олимпиада) стартовала в 2013 году по профилю «Информатика», в 2014 году к нему добавился профиль «Математика». В 2018 году олимпиада пополнилась профилем «Информационная безопасность», и с 2019 года – профилем «Робототехника», 2020 год обогатил олимпиаду еще на один профиль: «Искусственный интеллект», а в 2022 года – «Финтех». Ежегодно участниками международной Олимпиады становятся участники, занимающиеся промышленным и спортивным программированием, совершенствующие собственные навыки в информатике и математике; планирующие развиваться в области инноваций, IT и робототехники. За 9 лет более 66 000 учащихся из 80 регионов России и 51 иностранного государства стали участниками олимпиады.

## О профиле «Математика»

Олимпиада «Innopolis Open» по профилю «Математика» проводится в два этапа.

Первый этап является отборочным. Его результат, если он привел к проходу на второй этап, далее не учитывается. Отборы проводятся в дистанционном формате с автоматизированной проверкой ответов в автоматизированной тестирующей системе, в два независимых тура. Участник может принять участие как в одном из туров первого этапа, так и в двух. При определении победителей и призеров первого этапа берется лучший результат участника, показанный в турах этапа.

Второй этап является заключительным, именно по его результатам определяются победители и призеры олимпиады. По формату второй этап – классическая письменная олимпиада с полноценным оформлением и последующей проверкой решений. Часть задач – задачи на вычисление каких-то элементов, часть – задачи на доказательство различных утверждений, а часть задач содержит в себе и первое и второе.

Как и любая олимпиада высокого уровня, «Innopolis Open» по профилю «Математика» требует от участников не столько специфических знаний, сколько умения изобретательно применять и комбинировать знания, полученные во время основных школьных занятий, а также дополнительных занятий в формате очных кружков, дистанционных курсов или самостоятельной работы с литературой. Простого алгоритма, как развить в себе такие умения и тем самым подготовиться к олимпиаде, нет, на то она и олимпиада, но хорошее освоение школьной программы, дополнительные занятия математикой, самостоятельная работа и опыт участия в других олимпиадах, конечно, помогают.

Для каждого этапа Олимпиады экспертно-методическая комиссия профиля рекомендует ознакомиться с дополнительными материалами для самостоятельного изучения, предоставленными в открытом доступе на странице профиля на официальном сайте олимпиады https://dovuz.innopolis.university/io-maths/.

Прорешивая задания отборочных этапов, участники олимпиады приобретают необходимые знания, позволяющие им в полном объеме продемонстрировать понимание основных компетенций, необходимые для успешного выступления на заключительном этапе международной олимпиады.

## Темы для подготовки к профилю

Приведем список тем и умений, на который рекомендуем обратить внимание в процессе подготовки к олимпиаде. Список не является полным перечислением всего, что может быть, а акцентирует внимание на наиболее важных для подготовки темах и методах, находящихся на границе школьной программы. Подразумевается, что основную школьную программу участник и так знает в достаточной степени. В связи с тем, что одни и те же методы и темы, но на разном уровне сложности, встречаются в олимпиадах разных классов, и для формирования более полной картины, мы не стали разбивать список на классы. Рекомендуем ориентироваться на школьную программу, включая материал дополнительных глав учебников, на литературу, перечисленную ниже и на варианты прошлых лет олимпиады.

## 7 КЛАСС

### Тема 1. Алгебраические выражения, уравнения, графики.

***Алгебраические выражения и уравнения***

Степень с натуральным показателем, её свойства. Многочлены, правило умножения многочленов, формулы сокращённого умножения. Линейные уравнения с одной переменной с параметром и без параметра. Линейные системы с несколькими переменными: метод сложения, метод подстановки.

***Функции и графики***

Изображение функции с помощью графика, определение значений функции по графику. График линейной функции, зависимость графика от параметров. График функций $y = x^2$ и $y = x^3$. Графическое решение систем из двух линейных уравнений с двумя переменными.

### Тема 2 Натуральные, целые, действительные числа.

***Целые, рациональные, действительные числа.***

Деление натуральных чисел с остатком и без остатка. Простые числа. Разложение натурального числа на простые множители. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Десятичная запись натуральных и целых чисел. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9. Признаки делимости на составные числа 6, 10, 12, 18, 36, 45, 72 и т.д. Арифметические действия над обыкновенными и десятичными дробями.

***Уравнения в целых числах.***

Линейные уравнения в целых числах (диофантовы уравнения). Системы линейных уравнений в целых числах. Нелинейные уравнения в целых числах.

### Тема 3. Текстовые задачи.

***Доли, проценты.***

Понятие процентного отношения. Двукратное применение процентного отношения. Изменение процентного содержания одной из компонент в двухкомпонентной системе. Вычисление целого по его известной части. Нахождение неизвестной части целого.

***Задачи на движение.***

Графическое изображение условий задачи. Элементарные задачи на движение одного объекта. Движение двух объектов с разными скоростями. Простейшие задачи на движение по окружности (подсчёт количества встреч и времени обгона).

## Тема 4. Планиметрические задачи.

***Основные понятия геометрии***

Прямые, точки, перпендикулярные прямые, параллельные прямые, углы. Измерение углов. Измерение отрезков. Расстояние от точки до прямой. Плоскость как множество точек. Разбиение плоскости на две полуплоскости. Биссектриса угла как геометрическое место точек, равноудалённых от сторон. Серединный перпендикуляр к отрезку как геометрическое место точек, равноудалённых от концов. Свойства накрест лежащих и односторонних углов при параллельных прямых. Признак параллельности прямых.

***Треугольники***

Признаки равенства треугольников. Биссектриса, медиана, высота в треугольнике. Сумма углов треугольника. Равнобедренный треугольник. Свойства углов равнобедренного треугольника. Свойства биссектрисы, медианы, высоты в равнобедренном треугольнике. Прямоугольный треугольник. Признак равенства прямоугольных треугольников.

***Окружность***

Вписанная и описанная окружность треугольника, положение центров. Касательная к окружности.

***Построения***

Построение треугольника по трём элементам. Построение биссектрисы угла. Построение отрезка (угла), равного данному отрезку (углу). Деление отрезка пополам. Построение параллельной и перпендикулярной прямой. Метод геометрических мест в задачах на построение.

# 8 КЛАСС

## Тема 1. Элементарные функции и графики.

***Элементарные функции***

Декартова прямоугольная система координат. Понятие функции. Область определения, множество значений, график. Четные и нечетные функции. Периодические функции. Наименьший положительный период. Монотонные функции. Локальный экстремум. Линейная функция, прямая. Угловой коэффициент прямой. Условия параллельности двух прямых на плоскости. Квадратный трехчлен, парабола. Выделение полного квадрата. Промежуток возрастания, промежуток убывания, точка экстремума. Множество значений квадратного трехчлена.

Дробно-линейная функция, гипербола. Асимптоты и оси симметрии гиперболы.

***Элементарные функции с модулем***

Преобразование модуля, примененное к аргументу. Преобразование модуля, примененное к функции. Композиция линейной функции и модуля.

***Окружности на плоскости***

Расстояние от точки до начала координат. Расстояние между двумя точками. Уравнение окружности.

Уравнение окружности со смещенным центром.

**Тема 2. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства.**

***Линейные и квадратные уравнения***

Линейные уравнения без параметра и с параметром. Квадратные уравнения. Условие разрешимости, условие единственного решения, условие неразрешимости. Различные формулы для корней квадратного уравнения. Теоремы Виета. Вычисление коэффициентов квадратного уравнения с заданными корнями. Вычисление симметрических функций от корней через коэффициенты. Уравнения, приводящиеся к квадратным с помощью замены переменной.

***Свойства алгебраических неравенств***

Числовые неравенства. Равносильные преобразования неравенств. Линейные неравенства. Квадратные неравенства. Дробно-линейные неравенства.

Неравенства, содержащие модуль. Тождественные неравенства. Среднее арифметическое и среднее геометрическое двух неотрицательных чисел.

***Формулы сокращенного умножения***

Формулы сокращенного умножения и деления. Преобразование выражений с модулями. Разложение на множители числовых выражений. Разложение на множители выражений с параметрами. Деление многочленов с остатком. Преобразование дробно-рациональных выражений. Алгебраические выражения.

***Системы линейных уравнений***

Понятие равносильных систем, понятие следствия. Системы линейных алгебраических уравнений, имеющие единственное решение. Графический метод. Метод исключения неизвестных. Метод алгебраических преобразований. Вычисление линейной функции от решения линейной системы методом алгебраических преобразований. Простые текстовые задачи, приводящие к линейным системам. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, не имеющие решений или имеющие бесконечное множество решений. Геометрическая интерпретация. Системы, приводящиеся к линейным с помощью замены переменной.

**Тема 3. Натуральные, целые, действительные числа.**

***Целые, рациональные, действительные числа.***

Деление натуральных чисел с остатком и без остатка. Простые числа. Разложение натурального числа на простые множители. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Десятичная запись натуральных и целых чисел. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9. Признаки делимости на составные числа 6, 10, 12, 18, 36, 45, 72 и т.д. Множество действительных чисел, числовая прямая. Сравнение действительных чисел. Модуль действительного числа. Арифметические действия над обыкновенными и десятичными дробями. Приведение периодической десятичной дроби к рациональному виду. Представление рационального числа в виде периодической десятичной дроби.

***Уравнения в целых числах.***

Линейные уравнения в целых числах (диофантовы уравнения). Системы линейных уравнений в целых числах. Нелинейные уравнения в целых числах. Системы нелинейных уравнений в целых числах.

***Текстовые задачи с целочисленными решениями.***

Понятие объединения и пересечения множеств. Подсчет количества элементов множества, обладающих одновременно двумя свойствами. Подсчет количества элементов множества, обладающих одним из двух свойств.

**Тема 4. Текстовые задачи.**

***Понятие процентного отношения.***

Понятие процентного отношения. Двукратное применение процентного отношения. Понятие сложных процентов.

***Задачи на движение.***

Графическое изображение условий задачи. Элементарные задачи на движение одного объекта. Движение двух объектов с разными скоростями. Движение вниз и вверх по реке. Движение по замкнутой траектории (окружности).

***Текстовые задачи экономической тематики.***

Понятия выручки, расхода, дохода, прибыли. Понятия работы и производительности труда. Понятие спроса и предложения.

***Смеси и сплавы.***

Вычисление концентрации смеси двух растворов.

**Тема 5. Планиметрические задачи, треугольники.**

***Прямоугольный и равнобедренный треугольники***

Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Равнобедренный треугольник. Вычисление радиусов вписанного и описанного круга.

***Биссектриса треугольника***

Основные свойства биссектрисы. Вычисление длины биссектрисы.

***Медиана и высота треугольника***

Основные свойства медианы. Вычисление длины медианы. Основные свойства высоты. Вычисление длины высоты. Вписанная и описанная окружности.

***Площадь треугольника***

Вычисление площади по двум сторонам и углу между ними. Вычисление площади по стороне и двум прилежащим углам. Вычисление площади по радиусу вписанного круга

***Четырехугольники***

Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат. Трапеция.

***Графические методы решения уравнений и неравенств.***

Пересечение прямой и параболы. Графическое решение уравнений и систем уравнений, включающих уравнения окружностей, прямых, квадратов и других простейших фигур. Пересечение прямой и окружности. Взаимное расположение ломаной линии и окружности.

**Тема 6. Теория вероятностей и комбинаторика.**

***Теория вероятностей***

Понятие вероятности. Вычисление вероятности в задачах с равновероятными элементарными событиями. Основные правила теории вероятностей: формула сложения вероятности двух событий, правило умножения вероятностей для независимых событий, вероятность противоположного события.

***Комбинаторика***

Правило умножения и правило сложения в комбинаторике. Основные задачи комбинаторики: подсчёт числа перестановок и сочетаний. Рекуррентные соотношения. Составление рекуррентных соотношений в комбинаторных задачах. Решение линейных рекуррентных соотношений второго порядка. Основы теории множеств в комбинаторике. Формула включений-исключений.

**9 КЛАСС**

**Тема 1. Элементарные функции и графики.**

***Элементарные функции***

Декартова прямоугольная система координат. Понятие функции. Область определения, множество значений, график. Четные и нечетные функции. Периодические функции. Наименьший положительный период. Монотонные функции. Локальный экстремум. Преобразование графиков. Сдвиг, растяжение, зеркальная симметрия, центральная симметрия. Линейная функция, прямая. Уравнение прямой в различных формах. Угловой коэффициент прямой. Условия параллельности двух прямых на плоскости. Условия перпендикулярности двух прямых на плоскости. Квадратный трехчлен, парабола. Выделение полного квадрата. Промежуток возрастания, промежуток убывания, точка экстремума. Множество значений квадратного трехчлена. Дробно-линейная функция, гипербола. Асимптоты и оси симметрии гиперболы.

***Элементарные функции с модулем***

Преобразование модуля, примененное к аргументу. Преобразование модуля, примененное к функции. Композиция линейной функции и модуля. Композиция квадратного трехчлена и модуля. Композиция дробно-линейной функции и модуля.

***Точки, прямые, многоугольники на плоскости***

Множества на плоскости. Параллельный перенос, растяжение. Зеркальная и центральная симметрия. Преобразование подобия. Свойства симметрии фигур, описываемых уравнениями и неравенствами с одним и несколькими модулями. Расстояние от точки до начала координат. Расстояние между двумя точками. Расстояние от прямой до начала координат. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми. Фигуры на плоскости, определяемые уравнениями и неравенствами, включающими $|x|$ и $|y|$ в различных комбинациях.

***Окружности на плоскости***

Уравнение окружности. Уравнение окружности со смещенным центром. Уравнение окружности с модулями.

**Тема 2. Алгебраические уравнения.**

***Линейные и квадратные уравнения***

Линейные уравнения без параметра и с параметром. Квадратные уравнения. Условие разрешимости, условие единственного решения, условие неразрешимости. Различные формулы для корней квадратного уравнения. Теоремы Виета. Вычисление коэффициентов квадратного уравнения с заданными корнями. Вычисление симметрических функций от корней через коэффициенты. Квадратные уравнения с параметром. Уравнения, приводящиеся к квадратным с помощью замены переменной. Методы решения дробно-рациональных уравнений.

***Алгебраические уравнения старших степеней***

Метод понижения порядка алгебраических уравнений. Биквадратные уравнения. Симметрические уравнения. Методы разложения на множители для уравнений старших степеней. Уравнения, содержащие знак абсолютной величины.

**Тема 3. Алгебраические неравенства.**

***Свойства алгебраических неравенств***

Числовые неравенства. Равносильные преобразования неравенств. Линейные неравенства. Квадратные неравенства. Дробно-линейные неравенства.

Неравенства, содержащие модуль и несколько модулей. Тождественные неравенства. Среднее арифметическое и среднее геометрическое двух неотрицательных чисел. Свойства суммы двух взаимно обратных чисел.

***Метод интервалов***

Метод интервалов для многочлена. Метод интервалов для рациональной функции. Метод интервалов для иррациональной функции.

**Тема 4. Системы алгебраических уравнений.**

***Системы линейных уравнений***

Понятие равносильных систем, понятие следствия. Системы линейных алгебраических уравнений, имеющие единственное решение. Графический метод. Метод исключения неизвестных. Метод алгебраических преобразований. Вычисление линейной функции от решения линейной системы методом алгебраических преобразований. Простые текстовые задачи, приводящие к линейным системам. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, не имеющие решений или имеющие бесконечное множество решений. Геометрическая интерпретация. Линейные системы с параметром. Условие единственного решения, отсутствия решений, бесконечного числа решений. Системы, приводящиеся к линейным с помощью замены переменной.

***Системы уравнений общего вида***

Виетовские системы. Метод решения, условие разрешимости. Системы, содержащие однородные уравнения. Симметрические системы. Метод замены переменных для решения систем.

**Тема 5. Алгебраические выражения.**

***Формулы сокращенного умножения***

Формулы сокращенного умножения и деления. Преобразование выражений с модулями. Разложение на множители числовых выражений. Разложение на множители выражений с параметрами. Деление многочленов с остатком. Преобразование дробно-рациональных выражений. Алгебраические выражения.

***Иррациональные алгебраические выражения***

Извлечение квадратного корня из полного квадрата числового выражения и выражения с параметром. Сложные радикалы. Избавление от иррациональности в знаменателе числового выражения и выражения с параметром. Сравнение иррациональных выражений. Числовые оценки иррациональных выражений без параметров.

## Тема 6. Иррациональные уравнения и неравенства.

***Основные методы решения иррациональных уравнений и неравенств***

Функция, график. Область определения, множество значений. Корни третьей, четвертой и старших степеней. Графический метод решения иррациональных уравнений и неравенств. Метод замены переменной. Использование одной и двух новых переменных. Использование монотонности и метод подбора при решении иррациональных уравнений и неравенств.

***Метод равносильных преобразований***

Уравнения и неравенства с полным квадратом под знаком квадратного корня. Метод разложения на множители. Универсальный метод решения иррациональных неравенств. Иррациональные уравнения и неравенства. Метод эквивалентных преобразований для иррациональных уравнений и неравенств. Понятие эквивалентного преобразования. Основные типы иррациональных уравнений и неравенств. Метод неэквивалентных преобразований. Понятие следствия. Понятие проверки решения. Эффективные методы проверки.

## Тема 7. Натуральные, целые, действительные числа.

***Целые, рациональные, действительные числа.***

Деление натуральных чисел с остатком и без остатка. Простые числа. Разложение натурального числа на простые множители. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Десятичная запись натуральных и целых чисел. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9. Признаки делимости на составные числа 6, 10, 12, 18, 36, 45, 72 и т.д. Иррациональные числа. Иррациональность и некоторых других алгебраических констант. Множество действительных чисел, числовая прямая. Сравнение действительных чисел. Модуль действительного числа. Арифметические действия над обыкновенными и десятичными дробями. Приведение периодической десятичной дроби к рациональному виду. Представление рационального числа в виде периодической десятичной дроби.

***Уравнения в целых числах.***

Линейные уравнения в целых числах (диофантовы уравнения). Системы линейных уравнений в целых числах. Нелинейные уравнения в целых числах. Системы нелинейных уравнений в целых числах. Условия целочисленности рациональной функции.

***Текстовые задачи с целочисленными решениями.***

Понятие объединения и пересечения множеств. Подсчет количества элементов множества, обладающих одновременно двумя свойствами. Подсчет количества элементов множества, обладающих одним из двух свойств.

## Тема 8. Текстовые задачи.

***Понятие процентного отношения.***

Понятие процентного отношения. Двукратное применение процентного отношения. Изменение процентного содержания одной из компонент в двухкомпонентной системе. Изменение процентного содержания одной из компонент в многокомпонентной системе.

***Понятие сложных процентов.***

Основные закономерности сложных процентов. Математические аспекты процесса прироста капитала в банке.

***Задачи на движение.***

Графическое изображение условий задачи. Элементарные задачи на движение одного объекта. Движение двух объектов с разными скоростями. Движение вниз и вверх по реке. Движение нескольких объектов по реке. Движение по замкнутой траектории (окружности).

***Понятие производительности труда.***

Работа и производительность труда одного участника. Совместная работа и производительность труда нескольких участников. Повышение и понижение производительности труда и связанное с этим изменение времени выполнения.

***Текстовые задачи экономической тематики.***

Понятия выручки, расхода, дохода, прибыли. Текстовые задачи на вычисление экстремальных значений в задачах экономического содержания. Задачи, требующие выработки оптимальной стратегии.

***Понятие спроса и предложения.***

Понятие спроса и предложения. Задачи оптимизации при заданном соотношении спроса и предложения.

***Смеси и сплавы.***

Вычисление концентрации смеси двух растворов. Вычисление концентрации смеси трех растворов. Максимальные и минимальные значения концентрации при смешивании. Вычисление площади по радиусу описанного круга.

**Тема 9. Планиметрические задачи, треугольники.**

***Прямоугольный и равнобедренный треугольники***

Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Тригонометрические функции. Равнобедренный треугольник. Вычисление радиусов вписанного и описанного круга.

***Биссектриса треугольника***

Основные свойства биссектрисы. Вычисление длины биссектрисы.

***Медиана и высота треугольника***

Основные свойства медианы. Вычисление длины медианы. Основные свойства высоты. Вычисление длины высоты. Вписанная и описанная окружности.

***Площадь треугольника***

Вычисление площади по двум сторонам и углу между ними. Вычисление площади по стороне и двум прилежащим углам. Вычисление площади по трем сторонам. Формула Герона. Вычисление площади по радиусу вписанного круга.

**Тема 10. Графические методы решения уравнений и систем.**

***Графические методы решения уравнений и неравенств. Многоугольники.***

Пересечение прямой и параболы. Взаимное расположение ломаной и параболы. Взаимное расположение двух парабол.

***Графические методы решения уравнений и неравенств. Окружности.***

Графическое решение уравнений и систем уравнений, включающих уравнения окружностей, прямых, квадратов и других простейших фигур. Пересечение прямой и окружности. Взаимное расположение ломаной линии и окружности. Взаимное расположение окружности и параболы. Уравнение окружности с модулями.

**Тема 11. Планиметрические задачи, многоугольники, окружности.**

***Окружности.***

Измерение углов и дуг, связанных с окружностью. Вписанные и центральные углы. Свойство пересекающихся хорд в окружности. Свойство касательной и секущей. Метрические соотношения в круге.

***Многоугольники.***

Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат. Трапеция. Метрические соотношения в четырехугольниках общего вида. Свойства четырехугольника, в который вписана окружность. Свойства четырехугольника, вокруг которого можно описать окружность.

## Тема 12. Последовательности и прогрессии.

***Арифметическая прогрессия.***

Понятие и свойства арифметической прогрессии. Вычисление суммы отрезка натурального ряда. Вычисление суммы отрезка арифметической прогрессии. Вычисление суммы множества натуральных чисел, определяемых свойствами делимости.

***Геометрическая прогрессия.***

Понятие и свойства геометрической прогрессии. Вычисление суммы отрезка геометрической прогрессии. Задачи на составление уравнений, связанных со свойствами геометрической прогрессии. Задачи, в которых присутствуют одновременно арифметическая и геометрическая прогрессии.

***Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.***

Понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Уравнения и неравенства, в которых присутствует сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

## Тема 13. Теория вероятностей и комбинаторика.

***Теория вероятностей***

Случайные события. Среднее значение, медиана, отклонения, дисперсия. Математическое описание случайных явлений. Элементарные события и их вероятность. Правило вычисления вероятности. Основы теории множеств: объединение, пересечение множеств, диаграммы Эйлера. Применение теории множеств для вычисления вероятности. Вероятность противоположного события. Объединение и пересечение событий. Формула сложения вероятностей для двух событий. Правило умножения вероятностей для независимых событий.

***Комбинаторика***

Правило умножения и правило сложения в комбинаторике. Формулы для числа перестановок и сочетаний в задачах комбинаторики. Основы теории множеств в комбинаторике. Формула включений-исключений. Подсчёт числа элементов в множестве путём разбиения его на подмножества. Рекуррентные соотношения. Составление рекуррентных соотношений в комбинаторных задачах. Решение линейных рекуррентных соотношений второго порядка.

**10 КЛАСС**
**Тема 1. Элементарные функции и графики.**

***Элементарные функции***

Декартова прямоугольная система координат. Понятие функции. Область определения, множество значений, график. Четные и нечетные функции. Периодические функции. Наименьший положительный период. Монотонные функции. Локальный экстремум. Преобразование графиков. Сдвиг, растяжение, зеркальная симметрия, центральная симметрия. Линейная функция, прямая. Уравнение прямой в различных формах. Угловой коэффициент прямой. Условия параллельности двух прямых на плоскости. Условия перпендикулярности двух прямых на плоскости. Квадратный трехчлен, парабола. Выделение полного квадрата. Промежуток возрастания, промежуток убывания, точка экстремума. Множество значений квадратного трехчлена. Дробно-линейная функция, гипербола. Асимптоты и оси симметрии гиперболы.

***Элементарные функции с модулем***

Преобразование модуля, примененное к аргументу. Преобразование модуля, примененное к функции. Композиция линейной функции и модуля. Композиция квадратного трехчлена и модуля. Композиция дробно-линейной функции и модуля.

***Точки, прямые, многоугольники на плоскости***

Множества на плоскости. Параллельный перенос, растяжение. Зеркальная и центральная симметрия. Преобразование подобия. Свойства симметрии фигур, описываемых уравнениями и неравенствами с одним и несколькими модулями. Расстояние от точки до начала координат. Расстояние между двумя точками. Расстояние от прямой до начала координат. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми. Фигуры на плоскости, определяемые уравнениями и неравенствами, включающими |x| и |y| в различных комбинациях.

***Окружности на плоскости***

Уравнение окружности. Уравнение окружности со смещенным центром. Уравнение окружности с модулями.

**Тема 2. Алгебраические уравнения.**

***Линейные и квадратные уравнения***

Линейные уравнения без параметра и с параметром. Квадратные уравнения. Условие разрешимости, условие единственного решения, условие неразрешимости. Различные формулы для корней квадратного уравнения. Теоремы Виета. Вычисление коэффициентов квадратного уравнения с заданными корнями. Вычисление симметрических функций от корней через коэффициенты. Квадратные уравнения с параметром. Уравнения, приводящиеся к квадратным с помощью замены переменной. Методы решения дробно-рациональных уравнений.

***Алгебраические уравнения старших степеней***

Метод понижения порядка алгебраических уравнений. Биквадратные уравнения. Симметрические уравнения. Методы разложения на множители для уравнений старших степеней. Уравнения, содержащие знак абсолютной величины.

**Тема 3. Алгебраические неравенства.**

***Свойства алгебраических неравенств***

Числовые неравенства. Равносильные преобразования неравенств. Линейные неравенства. Квадратные неравенства. Дробно-линейные неравенства.

Неравенства, содержащие модуль и несколько модулей. Тождественные неравенства. Среднее арифметическое и среднее геометрическое двух неотрицательных чисел. Свойства суммы двух взаимно обратных чисел.

***Метод интервалов***

Метод интервалов для многочлена. Метод интервалов для рациональной функции. Метод интервалов для иррациональной функции.

**Тема 4. Системы алгебраических уравнений.**

***Системы линейных уравнений***

Понятие равносильных систем, понятие следствия. Системы линейных алгебраических уравнений, имеющие единственное решение. Графический метод. Метод исключения неизвестных. Метод алгебраических преобразований. Вычисление линейной функции от решения линейной системы методом алгебраических преобразований. Простые текстовые задачи, приводящие к линейным системам. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, не имеющие решений или имеющие бесконечное множество решений. Геометрическая интерпретация. Линейные системы с параметром. Условие единственного решения, отсутствия решений, бесконечного числа решений. Системы, приводящиеся к линейным с помощью замены переменной.

***Системы уравнений общего вида***

Виетовские системы. Метод решения, условие разрешимости. Системы, содержащие однородные уравнения. Симметрические системы. Метод замены переменных для решения систем.

**Тема 5. Алгебраические выражения.**

***Формулы сокращенного умножения***

Формулы сокращенного умножения и деления. Преобразование выражений с модулями. Разложение на множители числовых выражений. Разложение на множители выражений с параметрами. Деление многочленов с остатком. Преобразование дробно-рациональных выражений. Алгебраические выражения.

***Иррациональные алгебраические выражения***

Извлечение квадратного корня из полного квадрата числового выражения и выражения с параметром. Сложные радикалы. Избавление от иррациональности в знаменателе числового выражения и выражения с параметром. Сравнение иррациональных выражений. Числовые оценки иррациональных выражений без параметров.

**Тема 6. Иррациональные уравнения и неравенства.**

***Основные методы решения иррациональных уравнений и неравенств***

Функция, график. Область определения, множество значений. Корни третьей, четвертой и старших степеней. Графический метод решения иррациональных уравнений и неравенств. Метод замены переменной. Использование одной и двух новых переменных. Использование монотонности и метод подбора при решении иррациональных уравнений и неравенств.

***Метод равносильных преобразований***

Уравнения и неравенства с полным квадратом под знаком квадратного корня. Метод разложения на множители. Универсальный метод решения иррациональных неравенств. Иррациональные уравнения и неравенства. Метод эквивалентных преобразований для иррациональных уравнений и неравенств. Понятие эквивалентного преобразования. Основные типы иррациональных уравнений и неравенств. Метод неэквивалентных преобразований. Понятие следствия. Понятие проверки решения. Эффективные методы проверки.

**Тема 7. Натуральные, целые, действительные числа.**

***Целые, рациональные, действительные числа.***

Деление натуральных чисел с остатком и без остатка. Простые числа. Разложение натурального числа на простые множители. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Десятичная запись натуральных и целых чисел. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9. Признаки делимости на составные числа 6, 10, 12, 18, 36, 45, 72 и т.д. Иррациональные числа. Иррациональность и некоторых других алгебраических констант. Множество действительных чисел, числовая прямая. Сравнение действительных чисел.

Модуль действительного числа. Арифметические действия над обыкновенными и десятичными дробями. Приведение периодической десятичной дроби к рациональному виду. Представление рационального числа в виде периодической десятичной дроби.

***Уравнения в целых числах.***

Линейные уравнения в целых числах (диофантовы уравнения). Системы линейных уравнений в целых числах. Нелинейные уравнения в целых числах. Системы нелинейных уравнений в целых числах. Условия целочисленности рациональной функции.

***Текстовые задачи с целочисленными решениями.***

Понятие объединения и пересечения множеств. Подсчет количества элементов множества, обладающих одновременно двумя свойствами. Подсчет количества элементов множества, обладающих одним из двух свойств.

**Тема 8. Текстовые задачи.**

***Понятие процентного отношения.***

Понятие процентного отношения. Двукратное применение процентного отношения. Изменение процентного содержания одной из компонент в двухкомпонентной системе. Изменение процентного содержания одной из компонент в многокомпонентной системе.

***Понятие сложных процентов.***

Основные закономерности сложных процентов. Математические аспекты процесса прироста капитала в банке.

***Задачи на движение.***

Графическое изображение условий задачи. Элементарные задачи на движение одного объекта. Движение двух объектов с разными скоростями. Движение вниз и вверх по реке. Движение нескольких объектов по реке. Движение по замкнутой траектории (окружности).

***Понятие производительности труда.***

Работа и производительность труда одного участника. Совместная работа и производительность труда нескольких участников. Повышение и понижение производительности труда и связанное с этим изменение времени выполнения.

***Текстовые задачи экономической тематики.***

Понятия выручки, расхода, дохода, прибыли. Текстовые задачи на вычисление экстремальных значений в задачах экономического содержания. Задачи, требующие выработки оптимальной стратегии.

***Понятие спроса и предложения.***

Понятие спроса и предложения. Задачи оптимизации при заданном соотношении спроса и предложения.

***Смеси и сплавы.***

Вычисление концентрации смеси двух растворов. Вычисление концентрации смеси трех растворов. Максимальные и минимальные значения концентрации при смешивании. Вычисление площади по радиусу описанного круга.

## Тема 9. Тригонометрические функции и тригонометрические формулы.

***Тригонометрические формулы.***

Тригонометрический круг. Измерение углов в радианах и градусах. Число $\pi$. Расположение точек 1, 2, 3, 4, 5, 6 радиан на тригонометрическом круге. Определение тригонометрических функций числового аргумента. Периодичность основных тригонометрических функций. Четные и нечетные функции. Промежутки возрастания и убывания. Наибольшие и наименьшие значения, множество значений. Графики тригонометрических функций. Формулы приведения. Формулы сложения и умножения. Формулы двойного и половинного угла. Вычисление тригонометрических функций для углов, кратных 15 градусов. Преобразование тригонометрических выражений с модулями. Корни основных тригонометрических функций. Знаки тригонометрических функций.

***Тригонометрические функции.***

Множество значений квадратного трехчлена с тригонометрической функцией. Множество значений дробно-линейной функции с тригонометрической функцией.

## Тема 10. Тригонометрические уравнения и неравенства.

***Элементарные тригонометрические уравнения.***

Уравнения вида $\cos(x) = a$, $tg(x) = a$. Тригонометрические уравнения, разлагающиеся на множители. Применение формул двойного и половинного угла. Метод вспомогательного угла. Элементарные тригонометрические неравенства.

***Квадратные тригонометрические уравнения и неравенства.***

Тригонометрические уравнения, приводящиеся к квадратным. Тригонометрические неравенства, приводящиеся к квадратным. Тригонометрические неравенства, разлагающиеся на множители. Тригонометрические неравенства, решаемые методом замены переменной.

**Тема 11. Методы решения тригонометрических уравнений и неравенств.**

***Метод разложения на множители в тригонометрии.***

Методы решения тригонометрических уравнений. Применение преобразования суммы в произведение. Применение преобразования произведения в сумму. Отбор общих корней в нескольких сериях решений тригонометрических уравнений. Иррациональные уравнения с тригонометрическими функциями.

***Метод понижения порядка в тригонометрии.***

Понижение порядка тригонометрических уравнений. Метод мажорант в тригонометрии. Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром. Системы тригонометрических уравнений и неравенств.

**Тема 12. Обратные тригонометрические функции.**

***Обратные тригонометрические функции, свойства и графики.***

Область определения и множество значений обратных функций. Формулы сложения обратных функций. Композиция тригонометрической функции и обратной тригонометрической функции. Композиция обратной тригонометрической функции и тригонометрической функции.

***Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями.***

Простейшие уравнения с обратными функциями. Простейшие неравенства с обратными функциями. Линейные уравнения. Квадратные уравнения и неравенства с обратными функциями.

**Тема 13. Планиметрические задачи, треугольники.**

***Прямоугольный и равнобедренный треугольники***

Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Равнобедренный треугольник. Вычисление радиусов вписанного и описанного круга.

***Биссектриса треугольника***

Основные свойства биссектрисы. Вычисление длины биссектрисы.

***Медиана и высота треугольника***

Основные свойства медианы. Вычисление длины медианы. Основные свойства высоты. Вычисление длины высоты. Вписанная и описанная окружности.

***Площадь треугольника***

Вычисление площади по двум сторонам и углу между ними. Вычисление площади по стороне и двум прилежащим углам. Вычисление площади по трем сторонам. Формула Герона. Вычисление площади по радиусу вписанного круга.

**Тема 14. Задачи с параметром.**

***Линейные уравнения и неравенства с параметром.***

Линейные уравнения с параметром. Линейные неравенства с параметром. Линейные системы с параметром.

***Квадратные уравнения и неравенства с параметром.***

Квадратные уравнения, системы и неравенства с параметром. Условия, при которых заданный промежуток расположен между корнями (вне корней) квадратного уравнения. Условия, при которых все числа заданного промежутка являются решениями квадратного неравенства. Системы квадратных неравенств с параметром.

***Уравнения с параметром в правой части.***

Уравнения с параметром в правой части. Связь со множеством значений. Уравнения и неравенства с ограничениями, зависящими от параметра. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами.

***Квадратные уравнения и неравенства относительно параметра.***

Квадратные уравнения относительно параметра. Алгебраические уравнения старших степеней, которые можно рассматривать как квадратные уравнения относительно параметра. Тригонометрические уравнения относительно параметра. Показательные уравнения относительно параметра.

Логарифмические уравнения относительно параметра. Иррациональные уравнения относительно параметра. Решение уравнений и неравенств на плоскости (параметр, переменная).

**Тема 15. Графические методы решения уравнений и систем с параметром.**

***Графические методы решения уравнений и неравенств. Многоугольники.***

Пересечение прямой и параболы. Взаимное расположение ломаной и параболы. Взаимное расположение двух парабол. Композиция тригонометрической функции и обратной тригонометрической функции. Композиция обратной тригонометрической функции и тригонометрической функции.

***Графические методы решения уравнений и неравенств. Окружности.***

Графическое решение уравнений и систем уравнений, включающих уравнения окружностей, прямых, квадратов и других простейших фигур. Пересечение прямой и окружности. Взаимное расположение ломаной линии и окружности. Взаимное расположение окружности и параболы. Уравнение окружности с модулями.

**Тема 16. Вычисление и применение производной.**

***Вычисление производной.***

Определение и геометрический смысл производной. Таблица производных. Правила вычисления производных. Вычисление производной сложной функции. Понятие о функциях, не имеющих производной в точке.

***Построение и применение касательных.***

Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции. Свойства касательной к параболе. Свойства касательной к кубической параболе. Свойства касательной к гиперболе. Понятие касания графиков двух функций.

**Тема 17. Применение производной для решения задач.**

***Точки экстремума функции.***

Нахождение участков монотонности. Исследование локальных экстремумов функции. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции.

***Текстовые задачи.***

Экстремальное значение суммы величин с заданным произведением. Экстремальное значение произведения величин с заданной суммой. Геометрическая интерпретация экстремальных задач. Экстремальное значение квадратичной функции двух переменных. Экстремальные задачи экономического содержания. Геометрические экстремальные задачи. Исследование количества корней уравнения с параметром.

***Задачи, связанные с оптимизацией экономической деятельности.***

Вычисление максимальной выручки при заданном объеме вложенных средств. Вычисление наименьшего объема вложенных средств для достижения заданной величины выручки.

***Задачи оптимизации экономической деятельности, решаемые с применением производной.***

Задачи оптимизации экономической деятельности, приводящиеся к исследованию свойств квадратного трехчлена. Задачи оптимизации экономической деятельности, приводящиеся к исследованию свойств степенных функций.

**Тема 18. Планиметрические задачи, многоугольники, окружности.**

***Теоремы синусов и косинусов.***

Теорема синусов. Теорема косинусов. Подобие треугольников.

***Окружности.***

Измерение углов и дуг, связанных с окружностью. Вписанные и центральные углы. Свойство пересекающихся хорд в окружности. Свойство касательной и секущей. Метрические соотношения в круге.

***Многоугольники.***

Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат. Трапеция. Метрические соотношения в четырехугольниках общего вида. Свойства четырехугольника, в который вписана окружность. Свойства четырехугольника, вокруг которого можно описать окружность.

## Тема 19. Обратная функция, сложная функция, функциональные уравнения.

***Сложная функция.***

Понятие сложной функции. Вычисление области определения сложной функции. Вычисление множества значений сложной функции. Вычисление производной сложной функции. Вычисление наибольшего и наименьшего значений сложной функции.

***Обратная функция.***

Понятие обратной функции. Общие правила построения обратной функции. Основные пары взаимно обратных функций: линейная, степенная, тригонометрические, показательная и логарифмическая.

***Множество значений сложной функции.***

Множество значений композиции нескольких квадратных трехчленов. Композиция квадратного трехчлена и тригонометрической функции. Композиция квадратного трехчлена и логарифмической функции. Композиция квадратного трехчлена и показательной функции.

## Тема 20. Последовательности и прогрессии.

***Арифметическая прогрессия.***

Понятие и свойства арифметической прогрессии. Вычисление суммы отрезка натурального ряда. Вычисление суммы отрезка арифметической прогрессии. Вычисление суммы множества натуральных чисел, определяемых свойствами делимости.

***Геометрическая прогрессия.***

Понятие и свойства геометрической прогрессии. Вычисление суммы отрезка геометрической прогрессии. Задачи на составление уравнений, связанных со свойствами геометрической прогрессии. Задачи, в которых присутствуют одновременно арифметическая и геометрическая прогрессии.

***Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.***

Понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Уравнения и неравенства, в которых присутствует сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

### Тема 21. Теория вероятностей и комбинаторика.

***Теория вероятностей***

Случайные события. Среднее значение, медиана, отклонения, дисперсия. Математическое описание случайных явлений. Элементарные события и их вероятность. Правило вычисления вероятности. Основы теории множеств: объединение, пересечение множеств, диаграммы Эйлера. Применение теории множеств для вычисления вероятности. Вероятность противоположного события. Объединение и пересечение событий. Формула сложения вероятностей для произвольного количества событий. Правило умножения вероятностей для независимых событий. Геометрическая вероятность. Задачи о выборе точки или нескольких точек внутри отрезка или квадрата. Применение геометрической модели для вычисления вероятности.

***Комбинаторика***

Правило умножения и правило сложения в комбинаторике. Основные задачи комбинаторики: подсчёт числа перестановок и сочетаний. Рекуррентные соотношения. Составление рекуррентных соотношений в комбинаторных задачах. Решение линейных рекуррентных соотношений второго порядка. Основы теории множеств в комбинаторике. Формула включений-исключений. Подсчёт числа элементов в множестве путём разбиения его на подмножества. Понятие отображения множеств и взаимно-однозначного соответствия между двумя множествами. Решение комбинаторных задач с помощью установления взаимно-однозначных соответствий.

## 11 КЛАСС

### Тема 1. Элементарные функции и графики.

***Элементарные функции***

Декартова прямоугольная система координат. Понятие функции. Область определения, множество значений, график. Четные и нечетные функции. Периодические функции. Наименьший положительный период.

Монотонные функции. Локальный экстремум. Преобразование графиков. Сдвиг, растяжение, зеркальная симметрия, центральная симметрия. Линейная функция, прямая. Уравнение прямой в различных формах. Угловой коэффициент прямой. Условия параллельности двух прямых на плоскости. Условия перпендикулярности двух прямых на плоскости. Квадратный трехчлен, парабола. Выделение полного квадрата. Промежуток возрастания, промежуток убывания, точка экстремума. Множество значений квадратного трехчлена. Дробно-линейная функция, гипербола. Асимптоты и оси симметрии гиперболы.

***Элементарные функции с модулем***

Преобразование модуля, примененное к аргументу. Преобразование модуля, примененное к функции. Композиция линейной функции и модуля. Композиция квадратного трехчлена и модуля. Композиция дробно-линейной функции и модуля.

***Точки, прямые, многоугольники на плоскости***

Множества на плоскости. Параллельный перенос, растяжение. Зеркальная и центральная симметрия. Преобразование подобия. Свойства симметрии фигур, описываемых уравнениями и неравенствами с одним и несколькими модулями. Расстояние от точки до начала координат. Расстояние между двумя точками. Расстояние от прямой до начала координат. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми. Фигуры на плоскости, определяемые уравнениями и неравенствами, включающими $|x|$ и $|y|$ в различных комбинациях.

***Окружности на плоскости***

Уравнение окружности. Уравнение окружности со смещенным центром. Уравнение окружности с модулями.

**Тема 2. Алгебраические уравнения.**

***Линейные и квадратные уравнения***

Линейные уравнения без параметра и с параметром. Квадратные уравнения. Условие разрешимости, условие единственного решения, условие неразрешимости. Различные формулы для корней квадратного уравнения. Теоремы Виета. Вычисление коэффициентов квадратного уравнения с заданными корнями. Вычисление симметрических функций от корней через коэффициенты. Квадратные уравнения с параметром. Уравнения, приводящиеся к квадратным с помощью замены переменной. Методы решения дробно-рациональных уравнений.

***Алгебраические уравнения старших степеней***

Метод понижения порядка алгебраических уравнений. Биквадратные уравнения. Симметрические уравнения. Методы разложения на множители для уравнений старших степеней. Уравнения, содержащие знак абсолютной величины.

## Тема 3. Алгебраические неравенства.

***Свойства алгебраических неравенств***

Числовые неравенства. Равносильные преобразования неравенств. Линейные неравенства. Квадратные неравенства. Дробно-линейные неравенства.

Неравенства, содержащие модуль и несколько модулей. Тождественные неравенства. Среднее арифметическое и среднее геометрическое двух неотрицательных чисел. Свойства суммы двух взаимно обратных чисел.

***Метод интервалов***

Метод интервалов для многочлена. Метод интервалов для рациональной функции. Метод интервалов для иррациональной функции.

## Тема 4. Системы алгебраических уравнений.

***Системы линейных уравнений***

Понятие равносильных систем, понятие следствия. Системы линейных алгебраических уравнений, имеющие единственное решение. Графический метод. Метод исключения неизвестных. Метод алгебраических преобразований. Вычисление линейной функции от решения линейной системы методом алгебраических преобразований. Простые текстовые задачи, приводящие к линейным системам. Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, не имеющие решений или имеющие бесконечное множество решений. Геометрическая интерпретация. Линейные системы с параметром. Условие единственного решения, отсутствия решений, бесконечного числа решений. Системы, приводящиеся к линейным с помощью замены переменной.

***Системы уравнений общего вида***

Виетовские системы. Метод решения, условие разрешимости. Системы, содержащие однородные уравнения. Симметрические системы.

Метод замены переменных для решения систем.

## Тема 5. Алгебраические выражения.

***Формулы сокращенного умножения***

Формулы сокращенного умножения и деления. Преобразование выражений с модулями. Разложение на множители числовых выражений. Разложение на множители выражений с параметрами. Деление многочленов с остатком. Преобразование дробно-рациональных выражений. Алгебраические выражения.

***Иррациональные алгебраические выражения***

Извлечение квадратного корня из полного квадрата числового выражения и выражения с параметром. Сложные радикалы. Избавление от иррациональности в знаменателе числового выражения и выражения с параметром. Сравнение иррациональных выражений. Числовые оценки иррациональных выражений без параметров.

**Тема 6. Иррациональные уравнения и неравенства.**

***Основные методы решения иррациональных уравнений и неравенств***

Функция, график. Область определения, множество значений. Корни третьей, четвертой и старших степеней. Графический метод решения иррациональных уравнений и неравенств. Метод замены переменной. Использование одной и двух новых переменных. Использование монотонности и метод подбора при решении иррациональных уравнений и неравенств.

***Метод равносильных преобразований***

Уравнения и неравенства с полным квадратом под знаком квадратного корня. Метод разложения на множители. Универсальный метод решения иррациональных неравенств. Иррациональные уравнения и неравенства. Метод эквивалентных преобразований для иррациональных уравнений и неравенств. Понятие эквивалентного преобразования. Основные типы иррациональных уравнений и неравенств. Метод неэквивалентных преобразований. Понятие следствия. Понятие проверки решения. Эффективные методы проверки.

**Тема 7. Натуральные, целые, действительные числа.**

***Целые, рациональные, действительные числа.***

Деление натуральных чисел с остатком и без остатка. Простые числа. Разложение натурального числа на простые множители. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Десятичная запись натуральных и целых чисел. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 8, 9. Признаки делимости на составные числа 6, 10, 12, 18, 36, 45, 72 и т.д. Иррациональные числа. Иррациональность и некоторых других алгебраических констант. Множество действительных чисел, числовая прямая. Сравнение действительных чисел. Модуль действительного числа. Арифметические действия над обыкновенными и десятичными дробями. Приведение периодической десятичной дроби к рациональному виду. Представление рационального числа в виде периодической десятичной дроби.

***Уравнения в целых числах.***

Линейные уравнения в целых числах (диофантовы уравнения). Системы линейных уравнений в целых числах. Нелинейные уравнения в целых числах.

Системы нелинейных уравнений в целых числах. Условия целочисленности рациональной функции.

***Текстовые задачи с целочисленными решениями.***

Понятие объединения и пересечения множеств. Подсчет количества элементов множества, обладающих одновременно двумя свойствами. Подсчет количества элементов множества, обладающих одним из двух свойств.

**Тема 8. Текстовые задачи.**

***Понятие процентного отношения.***

Понятие процентного отношения. Двукратное применение процентного отношения. Изменение процентного содержания одной из компонент в двухкомпонентной системе. Изменение процентного содержания одной из компонент в многокомпонентной системе.

***Понятие сложных процентов.***

Основные закономерности сложных процентов. Математические аспекты процесса прироста капитала в банке.

***Задачи на движение.***

Графическое изображение условий задачи. Элементарные задачи на движение одного объекта. Движение двух объектов с разными скоростями. Движение вниз и вверх по реке. Движение нескольких объектов по реке.

Движение по замкнутой траектории (окружности).

***Понятие производительности труда.***

Работа и производительность труда одного участника. Совместная работа и производительность труда нескольких участников. Повышение и понижение производительности труда и связанное с этим изменение времени выполнения.

***Текстовые задачи экономической тематики.***

Понятия выручки, расхода, дохода, прибыли. Текстовые задачи на вычисление экстремальных значений в задачах экономического содержания. Задачи, требующие выработки оптимальной стратегии.

***Понятие спроса и предложения.***

Понятие спроса и предложения. Задачи оптимизации при заданном соотношении спроса и предложения.

***Смеси и сплавы.***

Вычисление концентрации смеси двух растворов. Вычисление концентрации смеси трех растворов. Максимальные и минимальные значения концентрации при смешивании. Вычисление площади по радиусу описанного круга.

## Тема 9. Тригонометрические функции и тригонометрические формулы.

***Тригонометрические формулы.***

Тригонометрический круг. Измерение углов в радианах и градусах. Число $\pi$. Расположение точек 1, 2, 3, 4, 5, 6 радиан на тригонометрическом круге. Определение тригонометрических функций числового аргумента. Периодичность основных тригонометрических функций. Четные и нечетные функции. Промежутки возрастания и убывания. Наибольшие и наименьшие значения, множество значений. Графики тригонометрических функций. Формулы приведения. Формулы сложения и умножения. Формулы двойного и половинного угла. Вычисление тригонометрических функций для углов, кратных 15 градусов. Преобразование тригонометрических выражений с модулями. Корни основных тригонометрических функций. Знаки тригонометрических функций.

***Тригонометрические функции.***

Множество значений квадратного трехчлена с тригонометрической функцией. Множество значений дробно-линейной функции с тригонометрической функцией.

## Тема 10. Тригонометрические уравнения и неравенства.

***Элементарные тригонометрические уравнения.***

Уравнения вида $\cos(x) = a$, $tg(x) = a$. Тригонометрические уравнения, разлагающиеся на множители. Применение формул двойного и половинного угла. Метод вспомогательного угла. Элементарные тригонометрические неравенства.

***Квадратные тригонометрические уравнения и неравенства.***

Тригонометрические уравнения, приводящиеся к квадратным. Тригонометрические неравенства, приводящиеся к квадратным. Тригонометрические неравенства, разлагающиеся на множители. Тригонометрические неравенства, решаемые методом замены переменной.

## Тема 11. Методы решения тригонометрических уравнений и неравенств.

***Метод разложения на множители в тригонометрии.***

Методы решения тригонометрических уравнений. Применение преобразования суммы в произведение. Применение преобразования произведения в сумму. Отбор общих корней в нескольких сериях решений тригонометрических уравнений. Иррациональные уравнения с тригонометрическими функциями.

***Метод понижения порядка в тригонометрии.***

Понижение порядка тригонометрических уравнений. Метод мажорант в тригонометрии. Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром. Системы тригонометрических уравнений и неравенств.

**Тема 12. Обратные тригонометрические функции.**

***Обратные тригонометрические функции, свойства и графики.***

Область определения и множество значений обратных функций. Формулы сложения обратных функций. Композиция тригонометрической функции и обратной тригонометрической функции. Композиция обратной тригонометрической функции и тригонометрической функции.

***Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями.***

Простейшие уравнения с обратными функциями. Простейшие неравенства с обратными функциями. Линейные уравнения, включающие. Квадратные уравнения и неравенства с обратными функциями.

**Тема 13. Планиметрические задачи, треугольники.**

***Прямоугольный и равнобедренный треугольники***

Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Равнобедренный треугольник. Вычисление радиусов вписанного и описанного круга.

***Биссектриса треугольника***

Основные свойства биссектрисы. Вычисление длины биссектрисы.

***Медиана и высота треугольника***

Основные свойства медианы. Вычисление длины медианы. Основные свойства высоты. Вычисление длины высоты. Вписанная и описанная окружности.

***Площадь треугольника***

Вычисление площади по двум сторонам и углу между ними. Вычисление площади по стороне и двум прилежащим углам. Вычисление площади по трем сторонам. Формула Герона. Вычисление площади по радиусу вписанного круга.

**Тема 14. Показательная и логарифмическая функции.**

***Показательная функция.***

Свойства степеней с рациональным показателем. Понятие о степени с произвольным показателем. Показательная функция. Свойства степеней с произвольным показателем. Сравнение значений показательной функции.

Множество значений квадратного трехчлена с показательной функцией. Множество значений многочлена с показательной функцией. Множество значений показательной функции с квадратным трехчленом в показателе.

***Логарифмическая функция.***

Определение логарифма и его свойства. Логарифмическая функция. Логарифмические тождества. Преобразование логарифмических выражений.

Сравнение логарифмов. Множество значений квадратного трехчлена с логарифмической функцией. Множество значений логарифмической функции с квадратным трехчленом в показателе. Множество значений логарифмической функции с независимой переменной в основании.

**Тема 15. Показательные и логарифмические уравнения.**

***Показательные уравнения.***

Элементарные показательные уравнения. Показательные уравнения, приводящиеся к квадратным. Показательные уравнения, разлагающиеся на множители. Однородные показательные уравнения. Замена переменных в показательных уравнениях.

***Логарифмические уравнения.***

Элементарные логарифмические уравнения. Логарифмические уравнения, приводящиеся к квадратным. Логарифмические уравнения, разлагающиеся на множители. Однородные логарифмические уравнения. Замена переменных в логарифмических уравнениях. Показательно-логарифмические уравнения.

**Тема 16. Показательные и логарифмические неравенства.**

***Показательные неравенства.***

Элементарные показательные неравенства. Показательные неравенства, приводящиеся к квадратным. Показательные неравенства, разлагающиеся на множители. Однородные показательные неравенства. Замена переменных в показательных неравенствах.

***Логарифмические неравенства.***

Элементарные логарифмические неравенства. Логарифмические неравенства, приводящиеся к квадратным. Логарифмические неравенства, разлагающиеся на множители. Равносильные преобразования логарифмических неравенств. Проблемы, связанные с изменением ОДЗ при выполнении логарифмических преобразований. Показательно-логарифмические неравенства.

**Тема 17. Задачи с параметром.**

***Линейные уравнения и неравенства с параметром.***

Линейные уравнения с параметром. Линейные неравенства с параметром. Линейные системы с параметром.

***Квадратные уравнения и неравенства с параметром.***

Квадратные уравнения, системы и неравенства с параметром. Условия, при которых заданный промежуток расположен между корнями (вне корней) квадратного уравнения. Условия, при которых все числа заданного промежутка являются решениями квадратного неравенства. Системы квадратных неравенств с параметром.

***Уравнения с параметром в правой части.***

Уравнения с параметром в правой части. Связь со множеством значений. Уравнения и неравенства с ограничениями, зависящими от параметра. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами.

***Квадратные уравнения и неравенства относительно параметра.***

Квадратные уравнения относительно параметра. Алгебраические уравнения старших степеней, которые можно рассматривать как квадратные уравнения относительно параметра. Тригонометрические уравнения относительно параметра. Показательные уравнения относительно параметра.

Логарифмические уравнения относительно параметра. Иррациональные уравнения относительно параметра. Решение уравнений и неравенств на плоскости (параметр, переменная).

**Тема 18. Графические методы решения уравнений и систем с параметром.**

***Графические методы решения уравнений и неравенств. Многоугольники.***

Пересечение прямой и параболы. Взаимное расположение ломаной и параболы. Взаимное расположение двух парабол. Композиция тригонометрической функции и обратной тригонометрической функции. Композиция обратной тригонометрической функции и тригонометрической функции.

***Графические методы решения уравнений и неравенств. Окружности.***

Графическое решение уравнений и систем уравнений, включающих уравнения окружностей, прямых, квадратов и других простейших фигур. Пересечение прямой и окружности. Взаимное расположение ломаной линии и окружности. Взаимное расположение окружности и параболы. Уравнение окружности с модулями.

**Тема 19. Вычисление и применение производной.**

***Вычисление производной.***

Определение и геометрический смысл производной. Таблица производных. Правила вычисления производных. Вычисление производной сложной функции. Понятие о функциях, не имеющих производной в точке.

***Построение и применение касательных.***

Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции. Свойства касательной к параболе. Свойства касательной к кубической параболе. Свойства касательной к гиперболе. Понятие касания графиков двух функций.

**Тема 20. Применение производной для решения задач.**

***Точки экстремума функции.***

Нахождение участков монотонности. Исследование локальных экстремумов функции. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции.

***Текстовые задачи.***

Экстремальное значение суммы величин с заданным произведением. Экстремальное значение произведения величин с заданной суммой. Геометрическая интерпретация экстремальных задач. Экстремальное значение квадратичной функции двух переменных. Экстремальные задачи экономического содержания. Геометрические экстремальные задачи. Исследование количества корней уравнения с параметром.

***Задачи, связанные с оптимизацией экономической деятельности.***

Вычисление максимальной выручки при заданном объеме вложенных средств. Вычисление наименьшего объема вложенных средств для достижения заданной величины выручки.

***Задачи оптимизации экономической деятельности, решаемые с применением производной.***

Задачи оптимизации экономической деятельности, приводящиеся к исследованию свойств квадратного трехчлена. Задачи оптимизации экономической деятельности, приводящиеся к исследованию свойств степенных функций.

**Тема 21. Планиметрические задачи, многоугольники, окружности.**

***Теоремы синусов и косинусов.***

Теорема синусов. Теорема косинусов. Подобие треугольников.

***Окружности.***

Измерение углов и дуг, связанных с окружностью. Вписанные и центральные углы. Свойство пересекающихся хорд в окружности. Свойство касательной и секущей. Метрические соотношения в круге.

***Многоугольники.***

Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат. Трапеция. Метрические соотношения в четырехугольниках общего вида. Свойства четырехугольника, в который вписана окружность. Свойства четырехугольника, вокруг которого можно описать окружность.

## Тема 22. Обратная функция, сложная функция, функциональные уравнения.

***Сложная функция.***

Понятие сложной функции. Вычисление области определения сложной функции. Вычисление множества значений сложной функции. Вычисление производной сложной функции. Вычисление наибольшего и наименьшего значений сложной функции.

***Обратная функция.***

Понятие обратной функции. Общие правила построения обратной функции. Основные пары взаимно обратных функций: линейная, степенная, тригонометрические, показательная и логарифмическая.

***Множество значений сложной функции.***

Множество значений композиции нескольких квадратных трехчленов. Композиция квадратного трехчлена и тригонометрической функции. Композиция квадратного трехчлена и логарифмической функции. Композиция квадратного трехчлена и показательной функции.

## Тема 23. Последовательности и прогрессии.

***Арифметическая прогрессия.***

Понятие и свойства арифметической прогрессии. Вычисление суммы отрезка натурального ряда. Вычисление суммы отрезка арифметической прогрессии. Вычисление суммы множества натуральных чисел, определяемых свойствами делимости.

***Геометрическая прогрессия.***

Понятие и свойства геометрической прогрессии. Вычисление суммы отрезка геометрической прогрессии. Задачи на составление уравнений, связанных со свойствами геометрической прогрессии. Задачи, в которых присутствуют одновременно арифметическая и геометрическая прогрессии.

***Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.***

Понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Уравнения и неравенства, в которых присутствует сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

**Тема 24. Стереометрические задачи.**

***Аксиомы стереометрии.***

Аксиомы стереометрии. Параллельность и перпендикулярность прямых в пространстве. Векторы в пространстве.

***Тела.***

Многогранники. Площадь поверхности и объем многогранника. Правильные многогранники. Сфера. Площадь поверхности и объем сферы. Тела вращения.

**Тема 25. Теория вероятностей и комбинаторика.**

***Теория вероятностей***

Случайные события. Среднее значение, медиана, отклонения, дисперсия. Математическое описание случайных явлений. Элементарные события и их вероятность. Правило вычисления вероятности. Основы теории множеств: объединение, пересечение множеств, диаграммы Эйлера. Применение теории множеств для вычисления вероятности. Вероятность противоположного события. Объединение и пересечение событий. Формула сложения вероятностей для произвольного количества событий. Правило умножения вероятностей для независимых событий. Понятие случайной величины, её математического ожидания и дисперсии. Испытания Бернулли. Биномиальное распределение и его математическое ожидание. Геометрическая вероятность. Задачи о выборе точки или нескольких точек внутри отрезка или квадрата. Применение геометрической модели для вычисления вероятности.

***Комбинаторика***

Правило умножения и правило сложения в комбинаторике. Основные задачи комбинаторики: подсчёт числа перестановок и сочетаний. Рекуррентные соотношения. Составление рекуррентных соотношений в комбинаторных задачах. Решение линейных рекуррентных соотношений второго порядка. Обозначения $\Sigma$ и $\Pi$ для суммы и произведения набора чисел.

***Множества***

Множества и элементы. Формула включений-исключений. Подсчёт числа элементов в множестве путём разбиения его на подмножества. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность. Понятие отображения множеств, композиции отображений и взаимно-однозначного соответствия между двумя множествами. Решение комбинаторных задач с помощью установления взаимно-однозначных соответствий.

**Тема 26. Комплексные числа.**

***Комплексные числа***

Сложение, умножение, деление и сопряжение комплексных чисел. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Формула Муавра. Комплексная плоскость, геометрический смысл сопряжения и умножения на комплексное число.

## Рекомендованные источники информации для подготовки

Приведенный список литературы и ресурсов в сети Internet, которые могут быть полезны в процессе подготовки. Хороших книг и отличных сайтов много, но мы предпочли сделать наш список как можно более компактным, чтобы он служил ориентиром того, на что, на наш взгляд, следует обратить внимание в первую очередь. Для того, чтобы сформировалась более цельная картина, мы не стали разбивать список на классы. Все ресурсы содержат описания, у вас не вызовет затруднения, изучая соответствующие материалы, понять целевую аудиторию конкретных мероприятий, курсов, литературы.

### Информационные ресурсы и сайты олимпиад

1. olimpiada.ru — крупнейший информационный портал об олимпиадах в России.
2. vos.olimpiada.ru — сайт с информацией об этапах Всероссийской олимпиады школьников в городе Москве.
3. siriusolymp.ru — сайт школьного этапа Всероссийской олимпиады, проводимого Образовательным центром «Сириус».
4. rsr-olymp.ru — сайт Российского совета олимпиад школьников.
5. mccme.ru — сайт Московского центра непрерывного математического образования.
6. turgor.ru — сайт Международного математического «Турнира городов».
7. olympiads.mccme.ru/matprazdnik — сайт «Математического праздника» для 6 и 7 классов.
8. mmo.mccme.ru — сайт Московской математической олимпиады.
9. olymp.hse.ru/mmo — сайт олимпиады «Высшая проба».
10. www.etudes.ru — сайт проекта «Математические этюды».

**Дистанционные курсы**

1. edu.sirius.online — бесплатные онлайн-курсы Образовательного центра «Сириус».

**Базы задач**

1. problems.ru — база задач с решениями, каталогизацией и поиском.
2. zadachi.mccme.ru — информационно-поисковая система «Задачи по геометрии».

**Интернет–библиотеки**

1. ilib.mccme.ru и mccme.ru/free-books — библиотеки математической литературы. Ряд книг, перечисленных ниже, доступны бесплатно на этих ресурсах.

**Печатная учебная литература**

1. Серия книг «Школьные математические кружки».
2. Сайт журнала «Квантик» kvantik.com.
3. Архив номеров журнала «Квант» kvant.mccme.ru.
4. Р. К. Гордин. Это должен знать каждый матшкольник. mccme.ru/free-books/pdf/gordin.pdf.
5. А. Канель, А. Ковальджи. Как решают нестандартные задачи mccme.ru/free-books/olymp/KanKov.pdf.
6. «Ленинградские математические кружки» С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин.
7. Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. Алгебра и теория чисел для математических школ mccme.ru/free-books/pdf/alfutova.pdf.
8. В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии mccme.ru/free-books/prasolov/planim5.pdf.
9. В. В. Прасолов Задачи по стереометрии.
10. В. В. Прасолов. Задачи по алгебре, арифметике и анализу mccme.ru/free-books/prasolov/algebra.pdf.
11. В. В.Прасолов. Многочлены www.mccme.ru/free-books/prasolov/poly.pdf.
12. А. В. Акопян. Геометрия в картинках mccme.ru/free-books/akopyan/Akopyan.pdf.
13. Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин Комбинаторика.

**Печатные сборники задач наиболее авторитетных математических олимпиад**

1. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2009 Заключительные этапы.

2. В. В. Прасолов и др. Московские математические олимпиады 1935–1957 mccme.ru/free-books/olymp/mmo-35-57.pdf

3. В. В. Прасолов и др. Московские математические олимпиады 1958–1967

4. А. В. Бегунц и др. Московские математические олимпиады 1981–1992

5. Р. М. Федоров и др. Московские математические олимпиады 1993–2005 mccme.ru/free-books/olymp/mmo1993.pdf

6. Л. Э. Медников, А. В. Шаповалов Турнир городов: мир математики в задачах

7. А. К. Толпыго Тысяча задач Международного математического Турнира городов

8. Д. В. Фомин, К. П. Кохась Ленинградские математические олимпиады 1961–1991

9. Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике. Серия книг с 2012 по 2021 годы.

## ЗАДАНИЯ 2019–2020 УЧЕБНОГО ГОДА

### Задания финального этапа

**9 класс**

***Задача 1 (теория чисел)***. Решите уравнение $2^x = x^2$ в целых числах.

***Задача 2 (индукция, числовые последовательности)***. Найдите и докажите явное выражение (в терминах известных операций на целых числах) для общего члена последовательности, заданной следующим рекуррентным отношением: $a_0 = 1, a_1 = 1$, и
$a_{n+2} = (n+1)(a_n + a_{n+1})$ для $n \geq 0$.

***Задача 3 (комбинаторика).*** Есть 13 внешне одинаковых монет, среди которых одна – фальшивая, а все остальные – настоящие. Все настоящие монеты имеют одинаковый вес, а фальшивая – другой вес, отличный от настоящих монет. Можно ли взвешивая монеты на чашечных весах (без числовых делений) за три взвешивания найти фальшивую монету и одновременно определить ее вес относительно настоящих монет (то есть определить, легче она или тяжелее настоящих)?

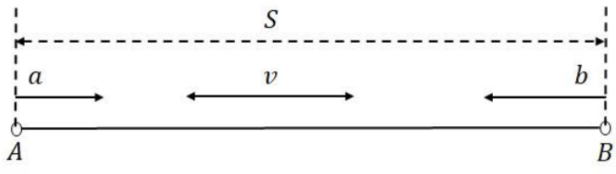
***Задача 4 (алгебраические уравнения)***. Нынешний год – високосный, то есть 29 февраля 2020 г. (29.02.20) – реальная календарная дата. Вычислим следующие величины:

- $S_1$=51 – сумма трёх чисел 2, 29 и 20;
- $S_2$=1245 – сумма квадратов этих чисел;
- $S_3$=32397 – сумма кубов этих же чисел.

Найдите все (вещественные) корни уравнения

$$x^3 + S_1x^2 + \frac{S_1^2 - S_2}{2}x + \frac{S_1^3 + 2S_3 - 3S_1S_2}{6} = 0.$$

***Задача 5 (текстовые задачи, прогрессия)***. Во время собеседования при приеме на работу в разных IT-компаниях любят задавать разные тестовые нестандартные задачи для проверки творческих способностей кандидата на работу. Одна из таких популярных тестовых задач следующая.




Точки $A$ и $B$ (см. рисунок) двигаются на встречу друг-другу (обычно говорят о двух «путниках») со скоростями $a$ и $b$ соответственно, а между ними все время «летает» со скоростью $v$ ($v$>$a$ и $v$>$b$) еще одна точка (обычно говорят о «мухе», которая летает с носа одного путника на нос другого путника без задержек на носу ни одного из путников). Начальное расстояние между точками $A$ и $B$ равно $S$.

Вопрос: какое расстояние пролетит точка-муха от момента начала движения точек-путников до момента их встречи?

Так вот, в этой задаче вам сначала надо ответить на вопрос, сформулированный в тестовой задаче: какое расстояние пролетит точка-муха от момента начала движения точек-путников до момента их встречи?

Далее, вам надо ответить на следующий вопрос (и доказать ответ!): конечное или бесконечное число полетов между точкам-путниками совершит точка-муха от момента начала движения до момента встречи точек-путников?

И, наконец, вам надо ответить на еще один вопрос. Пусть в начальный момент точка-муха находилась в точке $A$,

- $R_1$ – расстояние, которое разделяло $A$ и $B$, когда точка-муха в первый раз полетела от $A$ до $B$, а $R_2$ – расстояние, которое разделяло $B$ и $A$, когда точка-муха в первый раз полетела от $B$ до $A$,
- …
- $R_{2k-1}$ – расстояние, которое разделяло $A$ и $B$, когда точка-муха в k-ый раз полетела от $A$ до $B$, а $R_{2k}$ – расстояние, которое разделяло $B$ и $A$, когда точка-муха в -ый раз полетела от $B$ до $A$,
- …

Так вот, в качестве ответа на третий вопрос вам надо привести (и обосновать) формулы для $R_{2k-1}$ и $R_{2k}$ (для $k \geq 1$).

***Задача 6 (геометрическое место точек)***. Окружность – это, как известно, множество точек на плоскости, удаленных от заданной точки (центра) на фиксированное расстояние (радиус окружности), а число $\pi$ – это отношение длинны окружности к длине ее диаметра. В этом определении по умолчанию предполагают, что речь идет об Евклидовом расстоянии/длине, которая вычисляется на двумерной координатной плоскости ($XOY$) для отрезка с концами в точках ($x_1$,$y_1$) и ($x_2$,$y_2$) по формуле $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Однако, Евклидово определение длины – не единственно возможное. Например, манхэттенская длина отрезка с концами в точках ($x_1$,$y_1$) и ($x_2$,$y_2$) вычисляется по формуле $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|$. (Название «манхэттенское расстояние» связано с уличной планировкой Манхэттена, представляющую собой прямоугольную сетку улиц: «На север с юга идут авеню, на запад с востока — стриты» В. В. Маяковский, «Бродвей».)

Нарисуйте на координатной плоскости ($XOY$) манхэттенскую окружность манхэттенского радиуса 1 с центром в начале координат. Чему равно отношение манхэттенской длины манхэттенской окружности к манхэттенской длине ее диаметра?

**10 класс**

***Задача 1(теория чисел).*** Пусть $p$ – простое число. Решите уравнение $p^x = x^p$ в целых числах.

***Задача 2 (индукция, рекуррентные соотношения).*** Найдите и докажите явное выражение (в терминах известных операций на целых числах) для функции $g(m,n)$, определенной для целых неотрицательных аргументов следующим образом:

$$g(m,n) = n, \text{если } m = 0 \text{ то } n, \text{иначе } g(m,n) = g(m-1, m \times n).$$

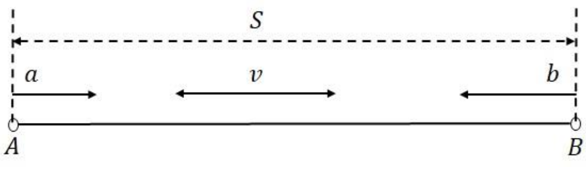
***Задача 3 (комбинаторика).*** Есть 14 внешне одинаковых монет, среди которых одна – фальшивая, а все остальные – настоящие. Все настоящие монеты имеют одинаковый вес, а фальшивая – другой вес, отличный от настоящих монет. Кроме того, есть «гирька», равная по весу настоящей монете. Существует ли способ найти фальшивую монету за три взвешивания (взвешивая монеты и гирьку) на чашечных весах (без числовых делений)? А если такой способ существует, то опишите этот способ и ответе еще на один вопрос: существует ли способ за три взвешивания (взвешивая монеты и гирьку) на чашечных весах одновременно найти фальшивую монету и определить вес фальшивой монеты относительно настоящих монет (то есть определить, легче она или тяжелее настоящих)?

***Задача 4 (алгебраические уравнения).*** Нынешний год – високосный, то есть 29 февраля 2020 г. (29.02.2020) – реальная календарная дата. Вычислим следующие величины:

- $S_1 = 2051$ – сумма трёх чисел 2, 29 и 2020;
- $S_2 = 4081245$ – сумма квадратов этих чисел;
- $S_3 = 8242432397$ – сумма кубов этих же чисел.

Найдите все (вещественные) корни уравнения $6x^3 - 6S_1x^2 + 3(S_1^2 - S_2)x - S_1^3 - 2S_3 + 3S_1S_2 = 0$.

***Задача 5 (текстовые задачи, прогрессия).*** Во время собеседования при приеме на работу в разных IT-компаниях любят задавать разные тестовые нестандартные задачи для проверки творческих способностей кандидата на работу. Одна из таких популярных тестовых задач следующая.




Точки $A$ и $B$ (см. рисунок) двигаются на встречу друг-другу (обычно говорят о двух «путниках») со скоростями $a$ и $b$ соответственно, а между ними все время «летает» со скоростью $v$ ($v > a$ и $v > b$) еще одна точка (обычно говорят о «мухе», которая летает с носа одного путника на нос другого путника без задержек на носу ни одного из путников). Начальное расстояние между точками $A$ и $B$ равно $S$, Вопрос: какое расстояние пролетит точка-муха от момента начала движения точек-путников до момента их встречи?

Так вот, в этой задаче вам сначала надо ответить на вопрос, сформулированный в тестовой задаче: какое расстояние пролетит точка-муха от момента начала движения точек-путников до момента их встречи?
Далее, вам надо ответить на следующий вопрос (и доказать ответ!): конечное или бесконечное число полетов между точкам-путниками совершит точка-муха от момента начала движения до момента встречи точек-путников?
И, наконец, вам надо ответить на еще один вопрос. Пусть в начальный момент точка-муха находилась в точке $A$,

- $W_1$ – расстояние, которое пролетит точка-муха в первый раз от $A$ до $B$, а $W_2$ – расстояние, которое пролетит точка-муха в первый раз от $B$ до $A$,
- …
- $W_{2k-1}$ – расстояние, которое пролетит точка-муха в -ый раз от $A$ до $B$, а $W_{2k}$ – расстояние, которое пролетит точка-муха в $k$-ый раз от $B$ до $A$,
- …

Так вот, в качестве ответа на третий вопрос вам надо привести (и обосновать) формулы для $W_{2k-1}$ и $W_{2k}$ (для $k \geq 1$).

***Задача 6 (геометрическое место точек).*** Окружность – это, как известно, множество точек на плоскости, удаленных от заданной точки (центра) на фиксированное расстояние (радиус окружности), а число $\pi$ – это отношение длинны окружности к длине ее диаметра. В этом определении по умолчанию предполагают, что речь идет об Евклидовом расстоянии/длине, которая вычисляется на двумерной координатной плоскости $(XOY)$ для отрезка с концами в точках $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ по формуле $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Однако, Евклидово определение длины – не единственно возможное. Например, так называемая равномерная длина отрезка с концами в точках $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ вычисляется по формуле $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$.

Нарисуйте на координатной плоскости $(XOY)$ равномерную окружность равномерного радиуса 1 с центром в начале координат. Чему равно отношение равномерной длинны равномерной окружности к равномерной длине ее диаметра?

## 11 класс

***Задача 1 (теория чисел, анализ).*** Рассмотрим уравнение $y^x = x^y$ на множестве положительных действительных чисел. Вам требуется явно указать для каждого вещественного значения $x > 0$ число таких различных вещественных чисел $y > 0$ что $y^x = x^y$. (Пример явного описания: для $x = 1$

существует единственное число $y > 0$ такое, что $y^x = x^y$)

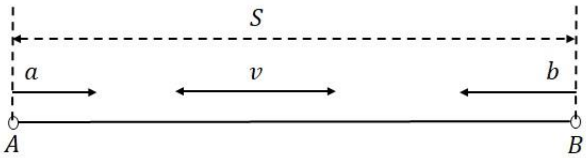
***Задача 2 (индукция, рекуррентные соотношения).*** Найдите и докажите явное выражение (в терминах известных операций на целых числах) для функции $g(m, n)$, вычисляющей пару чисел $(p, q)$, и определенной следующим образом для любых целых значений $m \in [0..100]$ и любых целых значений $n \geq 0$:

$$g(m,n) = (m, n+1), \text{если } m = 100, \text{иначе } (p-1, q), \text{где } (p,q) = g\big(g(m+1,n)\big).$$

***Задача 3 (комбинаторика).*** Найдите максимальное целое число $n \geq 0$, для которого верно следующее утверждение: «Существует способ найти (определить) единственную фальшивую монету среди $n$ внешне одинаковых монет, взвешивая монеты на чашечных весах (без числовых делений) не более трех раз и одновременно определить ее относительный вес (то есть легче она или тяжелее настоящих)».
(Замечание: предполагается, что все настоящие монеты имеют одинаковый вес, а фальшивая – другой вес, отличный от веса настоящих монет).

***Задача 4 (алгебраические уравнения, анализ).*** Нынешний год – високосный, то есть 29 февраля 2020 г. (29.02.20) – реальная календарная дата. Сколько (вещественных) корней (и какой кратности) имеет уравнение $x^3 + 29x^2 + 2x + 20 = 0$.

***Задача 5 (текстовые задачи, прогрессия).*** Во время собеседования при приеме на работу в разных IT-компаниях любят задавать разные тестовые нестандартные задачи для проверки творческих способностей кандидата на работу. Одна из таких популярных тестовых задач следующая (см. рисунок):




Точки $A$ и $B$ двигаются на встречу друг-другу (обычно говорят о двух «путниках») со скоростями $a$ и $b$ соответственно, а между ними все время «летает» со скоростью $v$ ($v > a$ и $v > b$) еще одна точка (обычно говорят о «мухе», которая летает с носа одного путника на нос другого путника без задержек на носу ни одного из путников). Начальное расстояние между точками $A$ и $B$ равно $S$, Вопрос: какое расстояние пролетит точка-муха от момента начала движения точек-путников до момента их встречи?

Так вот, в этой задаче вам сначала надо ответить на вопрос, сформулированный в тестовой задаче: какое расстояние пролетит точка-муха от момента начала движения точек-путников до момента их встречи?
Далее, вам надо ответить на следующий вопрос (и доказать ответ!): конечное или бесконечное число полетов между точкам-путниками совершит точка-муха от момента начала движения до момента встречи точек-путников?

И, наконец, вам надо ответить на еще один вопрос. Пусть в начальный момент точка-муха находилась в точке $A$. Какое суммарное расстояние пролетит точка-муха, когда движется от $A$ до $B$? А какое суммарное расстояние пролетит точка-муха, когда движется от $B$ до $A$?

***Задача 6 (геометрическое место точек).*** Окружность – это, как известно, множество точек на плоскости, удаленных от заданной точки (центра) на фиксированное расстояние (радиус окружности), а число $\pi$ – это отношение длинны окружности к длине ее диаметра. В этом определении по умолчанию предполагают, что речь идет об Евклидовом расстоянии/длине, которая вычисляется на двумерной координатной плоскости $(XOY)$ для отрезка с концами в точках $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ по формуле $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
Однако, Евклидово определение длины – не единственно-возможное. Например, манхэттенская длина отрезка с концами в точках $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$ вычисляется по формуле $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. (Название «манхэттенское расстояние» связано с уличной планировкой Манхэттена, представляющую собой прямоугольную сетку улиц: «На север с юга идут авеню, на запад с востока — стриты» В. В. Маяковский, «Бродвей».)
Чему равно отношение манхэттенской длинны Евклидовой окружности к манхэттенской длине ее диаметра?

## РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ 2019–2020 УЧЕБНОГО ГОДА

### Задания финального этапа

**9 класс**

***Задача 1.*** Сначала заметим, что 0 не может быть корнем уравнения, так как $2^0 = 1 \neq 0 = 0^2$. Также заметим, что отрицательные целые числа не могут быть корнями уравнения, так как для любого отрицательного целого числа $x$ имеем $2^x < 1$, а $x^2 \geq 1$.

Теперь отметим, что есть один очевидный целочисленный корень $x = 2$ нашего уравнения. В силу замечания вначале решения, если существует другой целочисленный корень $x$ нашего уравнения (то есть такое целое число, что $2^x = x^2$), то $x > 2$. Поэтому этот другой корень можно представить в виде $x = 2 + y$, где $y > 0$ – некоторое целое число.
Тогда имеем $4 \times 2^y = 2^{2+y} = 2^x = x^2 = (2 + y)^2 = 4 + 4y + y^2$.
Следовательно, $y$ – четное число, то есть $y = 2z$ для некоторого целого числа $z > 0$.

При подстановке $y = 2z$ в уравнение $4 \times 2^y = 4 + 4y + y^2$ и сокращения общего множителя (4) получаем новое уравнение $(2^z)^2 = 2^{2z} = 1 + 2z + z^2 = (1 + z)^2$ и еще более простое уравнение $2^z = z + 1$, которое уже очень просто решить: $z = 1$ (так как нас интересуют только положительные значения $y = 2z$). Следовательно, $y = 2,$ а $x = 2 + y = 4$.

***Задача 2.*** Начнём с того, что вычислим несколько первых членов последовательности:

- $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ по определению;
- $a_2 = (0 + 1)(a_0 + a_1) = (1 + 1) = 2$;
- $a_3 = (1 + 1)(a_1 + a_2) = 2 \times (1 + 2) = 6$;
- $a_4 = (2 + 1)(a_2 + a_3) = 3 \times (2 + 6) = 24$.

Можно заметить, что $a_n = n!$ для первых пяти членов последовательности (то есть для всех $n \in [0..4]$).
Докажем индукцией по $n$, что $a_n = n!$ для всех $n \geq 0$.
База индукции, $n = 0$ и $n = 1$, уже рассмотрена выше (см. вычисление первых членов последовательности).
Индукционная гипотеза: пусть $a_k = k!$ для всех $k \in [0..n]$.
Шаг индукции: $a_{n+1} = n(a_{n-1} + a_n) = n\big((n-1)! + n!\big) = n\big((n-1)! \times (1 + n)\big) = (n+1)!$

***Задача 3.*** Докажем (методом от противного), что определить фальшивую монету и одновременно ее относительный вес требуемым способом невозможно. Для этого предположим противное, то есть то, что есть такой способ.

1. Заметим, что так как за каждое одно взвешивание на чашечных весах можно получить только 3 результата (левая чашка легче правой, чашки уравновешены, правая чашка легче левой), то за два взвешивания на чашечных весах можно получить только 9 результатов.
2. Теперь покажем, что в первом взвешивании должно участвовать не менее 10 монет. Действительно, в противном случае в первом взвешивании участвует не более 8 монет (число должно быть четным, так как взвешивание происходит на чашечных весах, а на чашки весов надо класть равные количества монет). Значит, если в результате первого взвешивании чашки весов уравновесятся, то фальшивая монета – одна из не менее чем 5 монет, не участвовавших в первом взвешивании, она может быть как легче, так и тяжелее настоящих и, следовательно, у нас возможно не менее 10 вариантов (фальшивой монеты и ее относительного веса). А так как число результатов, которые можно получить за два взвешивания (см. пункт 1), меньше числа вариантов, то определение фальшивой монеты и ее относительного веса невозможно.
3. В силу пункта 2, в первом взвешивании участвует не менее 10 монет – не менее 5 на каждой чаше весов. Если в результате первого взвешивания одна чашка (с не менее чем 5 монетами) оказалась легче, а другая (тоже с не менее чем 5 монетами) – тяжелее, то у нас возможно

не менее 10 вариантов (фальшивой монеты и ее относительного веса). А так как число результатов, которые можно получить за два взвешивания (см. пункт 1), меньше числа вариантов, то определение фальшивой монеты и ее относительного веса невозможно.

Таким образом, предположив существование способа с помощью чашечных весов определить фальшивую монету и одновременно ее относительный вес, мы пришли к заключению, что способ не существует, то есть – к противоречию с предположением.

***Задача 4.*** Заметим, что если кубический многочлен $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ представим в виде произведения $(x + c_1)(x + c_2)(x + c_3)$, то имеют место следующие равенства:

- $a_1 = c_1 + c_2 + c_3$,
- $a_2 = c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3$,
- $a_2 = c_1c_2c_3$,

а корни уравнения $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ – это $-c_1$, $-c_2$ и $-c_3$. (Фактически, это вариант утверждения теоремы Виета.)

Так как в нашем уравнении $x^3 + S_1x^2 + \frac{S_1^2 - S_2}{2}x + \frac{S_1^3 + 2S_3 - 3S_1S_2}{6} = 0$ для первого коэффициента $a_1$ имеет место равенство $a_1 = S_1 = 2 + 29 + 20$, то можно предположить, что корни этого уравнения $x_1 = -2$, $x_2 = -29$ и $x_3 = -20$. Для того, чтобы доказать эту гипотезу, достаточно показать, что

- $\frac{S_1^2 - S_2}{2} = 2 \times 29 + 2 \times 2020 + 29 \times 20$,
- $\frac{S_1^3 + 2S_3 - 3S_1S_2}{6} = 2 \times 29 \times 20$.

Первое из этих равенств достаточно очевидно, но второе доказывается несколько более кропотливо, поэтому для упрощения доказательства введем обозначения $a = 2$, $b = 29$ и $c = 20$.
Для первого из равенств имеем:

$$\frac{S_1^2 - S_2}{2} = \frac{(a + \mathrm{b} + \mathrm{c})^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} = \frac{2ab + 2ac + 2bc}{2} = ab + ac + bc;$$

Для второго из равенств имеем:

$$\frac{S_1^3 + 2S_3 - 3S_1S_2}{6} = \frac{(a+b+c)^3 + 2(a^3+b^3+c^3) - 3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{6} =$$

$$= \frac{(a^3+b^3+c^3+3ab^2+3ac^2+3a^2b+3bc^2+3a^2c+3b^2c+6abc) + 2(a^3+b^3+c^3)}{6} -$$

$$- \frac{3(a^3+b^3+c^3+ab^2+ac^2+a^2b+bc^2+a^2c+b^2c)}{6} = abc.$$

***Задача 5.*** Сначала ответим на первый вопрос. Общее время движения точек-путников $t = \frac{S}{a+b}$; поэтому расстояние, которое пролетит точка-муха за это время $l = vt = \frac{Sv}{a+b}$.

Теперь ответим на второй вопрос: точка-муха совершит бесконечное число полетов меду точками-путниками. Для того, чтобы доказать этот ответ, предположим противное, то есть что точка-муха совершит некоторое конечное число полетов между точками-путниками. Рассмотрим последний полет точки-мухи между точками путниками. Если это был полет от точки $A$, движущейся направо со скоростью $a$, то так как это был последний полет, то точка-муха тоже летит направо со скоростью $v$ и прилетает в точку встречи точек-путников не раньше точки $A$, то есть скорость точки-мухи $v$ не больше скорости $a$. – Противоречие с тем, что $v > a$. Аналогично получаем противоречие в случае, если последний полет точки-мухи происходит от точки $B$. Следовательно, предположение о конечном числе полетов неверно.

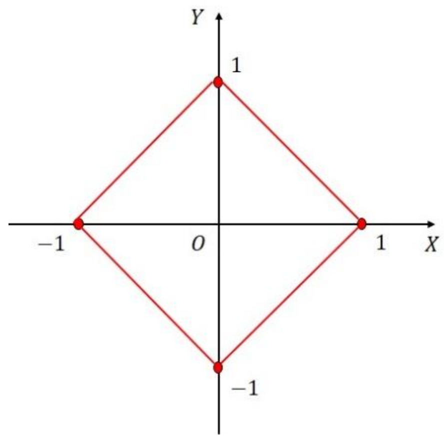
Перейдем к третьему вопросу.

Пусть в некоторый момент времени точка-муха находится в точке $A$ и в это время расстояние между точками $A$ и $B$ равно $\rho_0 > 0$. Тогда точка-муха окажется в точке $B$ спустя время $\tau_1 = \frac{\rho_0}{v+b}$, при этом точка-муха пролетит расстояние $\omega_1 = \tau_1 v = \frac{\rho_0 v}{v+b}$ в направлении от $A$ к $B$, а расстояние между точками $A$ и $B$ после полета будет равно $\rho_1 = \rho_0 - \tau_1(a+b) = \rho_0 - \frac{\rho_0(a+b)}{v+b} = \frac{\rho_0(v-a)}{v+b} = \rho_0 \times \frac{v-a}{v+b}$. После этого точка-муха снова окажется в точке $A$ спустя время $\tau_2 = \frac{\rho_1}{v+a} = \frac{\rho_0(v-a)}{(v+a)(v+b)}$, пролетит расстояние $\omega_2 = \tau_2 v = \frac{\rho_0(v-a)v}{(v+a)(v+b)}$ в направлении от $B$ к $A$, а расстояние между точками $A$ и $B$ после этого полета будет равно $\rho_2 = \rho_1 - \tau_2(a+b) = \frac{\rho_0(v-a)}{v+b} - \frac{\rho_0(v-a)(a+b)}{(v+a)(v+b)} = \frac{\rho_0(v-a)(v-b)}{(v+a)(v+b)} = \rho_0 \times \frac{(v-a)(v-b)}{(v+a)(v+b)}$.

Следовательно, для любого $k \geq 1$ мы имеем: расстояние между точками $A$ и $B$ после -ого перелета

- от $A$ до $B$ равно $R_{2k-1} = S \times \frac{v-a}{v+b} \times \left(\frac{(v-a)(v-b)}{(v+a)(v+b)}\right)^{k-1}$;
- от $B$ до $A$ равно $R_{2k} = S \times \left(\frac{(v-a)(v-b)}{(v+a)(v+b)}\right)^{k}$.

***Задача 6.*** Итак, манхэттенская окружность радиуса $R > 0$ с центром в начале координат $(0,0)$ – это множество всех точек координатной плоскости $(x, y)$ таких, что $|x - 0| + |y - 0| = R$ (то есть что $|x| + |y| = R$). В частности, для $R = 1$, данное уравнение может быть переписано в виде следующей системы ограничений (соответствующих четырем квадрантам координатной плоскости):




$$\left[\begin{array}{l} x \geq 0, y \geq 0, x + y = 1, \\ x \geq 0, y \leq 0, x - y = 1, \\ x \leq 0, y \geq 0, -x + y = 1, \\ x \leq 0, y \leq 0, -x - y = 1. \end{array}\right.$$

Это множество изображено на рисунке справа. Это и есть манхэттенская окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Манхэттенская длина ее манхэттенского диаметра равна $|(1) - (-1)| + |(0) - (0)| = 2$.

Вычислим манхэттенские длины каждой из четырех сторон этой манхэттенской окружности (начиная с первого квадранта и далее – против часовой стрелки): $|(1) - (0)| + |(0) - (1)| = |(0) - (-1)| + |(1) - (0)| = |(0) - (-1)| + |(-1) - (0)| = |(1) - (0)| + |(0) - (-1)| = 2$.

Следовательно, манхэттенская длина манхэттенской окружности равна 8, а отношение манхэттеновской длины манхэттеновской окружности к манхэттенской длине ее диаметра равно ${}^{8}/_{2} = 4$.

## 10 класс

***Задача 1.*** Сначала заметим, что 0 не может быть корнем уравнения, так как $p^0 = 1 \neq 0 = 0^p$. Также заметим, что отрицательные целые числа не могут быть корнями уравнения, так как для любого отрицательного целого числа $x$имеем $0 < 2^x < 1$, а $x^p \leq -1$ (если $p > 2$) или $x^p \geq 1$ (если $p = 2$).

Теперь отметим, что есть один очевидный целочисленный корень $x = p$ нашего уравнения. В силу замечания вначале решения, если существует другой целочисленный корень $x$ нашего уравнения (то есть такое целое число, что $p^x = x^p$), то этот другой корень можно представить в виде $x = p \pm y \neq 0$, где $y > 0$ – некоторое целое число.

Тогда имеем $p^{p \pm y} = p^x = x^p = (p \pm y)^p$, и, следовательно, число $y$ кратно простому числу $p$. Пусть $y = pz$ для некоторого целого числа $z > 0$.

При подстановке $y = pz$ в уравнение $p^{p \pm y} = p^x = x^p = (p \pm y)^p$ и сокращения общего множителя $p^p$ получаем новое уравнение $(p^{\pm z})^p = p^{\pm pz} = (1 \pm z)^p$, а потом – еще более простое уравнение $p^{\pm z} = 1 \pm z$.

Так как уравнение $p^{-z} = 1 - z$ не имеет целых положительных решений, то остается решить уравнение $p^z = 1 + z$ в целых положительных числах:

- если $p = 2$, то единственное целое положительное решение этого уравнения $z = 1$;
- если $p > 2$, то это уравнение не имеет решений в целых положительных числах (так как $p^z > 1 + z$ для $z > 0$).

***Задача 2.*** Сначала давайте «поэкспериментируем» и вычислим «символически» значение функции $g$ для какого-либо небольшого значения $m$, например, вычислим $g(3, n)$:

$$g(3,n) = g\big((3-1),(3\times n)\big) = g\big(2,(3\times n)\big) = g\Big((2-1),\big(2\times(3\times n)\big)\Big) =$$
$$= g\big(1,(2\times 3\times n)\big) = g\Big((1-1),\big(1\times(2\times 3\times n)\big)\Big) = g\big(0,(1\times 2\times 3\times n)\big) = (1\times 2\times 3\times n) = (1\times 2\times 3)\times n = (3!)\times n.$$

Поэтому, естественно, возникает гипотеза, что $g(m,n) = (m!)\times n$ для всех целых неотрицательных $m$ и $n$. Докажем индукцией по $m \geq 0$, что $g(m,n) = (m!)\times n$ для любого целого положительного $n \geq 0$.
База индукции $m = 0$: $g(0,n) = n = (0!)\times n$ для любого $n \geq 0$.
Индукционная гипотеза: пусть для всех $k \in [0..m]$ верно, что $g(k,n) = (k!)\times n$ для любого целого положительного $n \geq 0$.
Шаг индукции: $g\big((m+1),n\big) = g\Big(m,\big((m+1)\times n\big)\Big) = (m!)\times \big((m+1)\times n\big) = \big((m+1)!\big)\times n.$

***Задача 3.*** Сначала докажем, что одновременно определить фальшивую монету и ее относительный вес невозможно. – Действительно, мы имеем следующее:

1. за три взвешивания на чашечных весах можно получить только 27 результатов (так как за каждое одно взвешивание на чашечных весах можно получить только 3 результата – левая чашка легче правой, чашки уравновешены, правая чашка легче левой);
2. количество вариантов фальшивой монеты (из 14) и ее относительного веса (легче или тяжелее) равно $14 \times 2 = 28$;
3. так как число результатов, которые можно получить за два взвешивания (см. пункт 1), меньше числа вариантов (см. пункт 2), то определение фальшивой монеты и ее относительного веса невозможно.

В описании способа (алгоритма) определения фальшивой монеты будем использовать следующие обозначения:

- монеты будем обозначать (1), (2), … (14), а гирьку (15);
- выражения вида (p+q)?(r+s) для взвешивания, в котором, в данном случае, пара «объектов» p и q (из монет и гирьки) помещены на левую чашку весов, а пара других объектов r и s (тоже из монет и гирьки) – на правую;

- у взвешивания (p+q)?(r+s) может быть три исхода: < (если левая чашка легче), = (если чашки уравновешены) и > (если правая чашка легче).

Теперь мы можем дать комментированное описание способа (алгоритма), который получает 14 монет (1)..(14), среди которых ровно одна фальшивая имеет вес, отличный от веса других настоящих монет равного веса, использует гирьку (15), равную по весу настоящей монете, и определяет фальшивую монету за три взвешивания на чашечных весах:
**case ((1)+…(5))?((6)+…(9)+(15)) of:**

- = (то есть фальшивая среди (10)..(14), а все (1)..(9) - настоящие): **case ((1)+(10))?((11)+(12)) of:**
  - = (то есть фальшивая среди (13) и (14)): **case ((1))?((13)):**
    - = (то есть (13) настоящая): фальшивая монета (14);
    - < (возможно только если (13) фальшивая и тяжелее): фальшивая монета (13);
    - > (возможно только если (13) фальшивая и легче): фальшивая монета (13);
  - < (то есть фальшивая среди (10) и легче или среди (11) и (12) и тяжелее): **case ((1)+(2))?((10)+(11)):**
    - = (возможно только если (12) фальшивая и тяжелее): фальшивая монета (12);
    - < (возможно только если (11) фальшивая и тяжелее): фальшивая монета (11);
    - > (возможно только если (10) фальшивая и легче): фальшивая монета (10);
  - > (то есть фальшивая среди (10) и тяжелее или среди (11) и (12) и легче): **case ((1)+(2))?((10)+(11)):**
    - = (возможно только если (12) фальшивая и легче): фальшивая монета (12);
    - < (возможно только если (10) фальшивая и тяжелее): фальшивая монета (10);
    - > (возможно только если (11) фальшивая и легче): фальшивая монета (11);
- < (то есть фальшивая среди (1)..(5) и легче, или среди (6)..(9) и тяжелее, а все (10)..(14) - настоящие): **case ((1)+(2)+(3)+(6)+(7)+(8))?((10)+(11)+(12)+(13)+(14)+(15)) of:**
  - = (то есть фальшивая среди (4) и (5) и легче, или (9) и тяжелее, а все остальные монеты – настоящие): **case ((4))?((5)) of:**
    - = (возможно только если фальшивая (9) и тяжелее): фальшивая монета (9);
    - < (возможна только если фальшивая (4) и легче): фальшивая монета (4);

    - > (возможна только если фальшивая (5) и легче): фальшивая монета (5);
  - < (возможно только если фальшивая среди (1), (2) или (3) и легче): **case ((1))?((2)) of:**
    - = (возможно только если фальшивая (3) и легче): фальшивая монета (3);
    - < (возможна только если фальшивая (1) и легче): фальшивая монета (1);
    - > (возможна только если фальшивая (2) и легче): фальшивая монета (2);
  - > (возможно только если фальшивая среди (6), (7) или (8) и тяжелее): **case ((6))?((7)) of:**
    - = (возможно только если фальшивая (8) и тяжелее): фальшивая монета (8);
    - < (возможна только если фальшивая (7) и тяжелее): фальшивая монета (7);
    - > (возможна только если фальшивая (6) и тяжелее): фальшивая монета (6);
- > (то есть фальшивая среди (1)..(5) и тяжелее, или среди (6)..(9) и легче, а все (10)..(14) - настоящие): **case ((1)+(2)+(3)+(6)+(7)+(8))?((10)+(11)+(12)+(13)+(14)+(15)) of:**
  - = (то есть фальшивая среди (4) и (5) и тяжелее, или (9) и легче, а все остальные монеты – настоящие): **case ((4))?((5)) of:**
    - = (возможно только если фальшивая (9) и легче): фальшивая монета (9);
    - < (возможна только если фальшивая (5) и тяжелее): фальшивая монета (5);
    - > (возможна только если фальшивая (4) и тяжелее): фальшивая монета (4);
  - < (возможно только если фальшивая среди (6), (7) или (8) и легче): **case ((6))?((7)) of:**
    - = (возможно только если фальшивая (8) и легче): фальшивая монета (8);
    - < (возможна только если фальшивая (6) и легче): фальшивая монета (6);
    - > (возможна только если фальшивая (7) и легче): фальшивая монета (7);
  - > (возможно только если фальшивая среди (1), (2) или (3) и тяжелее): **case ((1))?((2)) of:**
    - = (возможно только если фальшивая (3) и тяжелее): фальшивая монета (3);

- < (возможна только если фальшивая (2) и тяжелее): фальшивая монета (2);
- > (возможна только если фальшивая (1) и тяжелее): фальшивая монета (1).

Корректность и полнота способа (алгоритма) следует из описания алгоритма и комментариев.

***Задача 4.*** Заметим, что если кубический многочлен $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ представим в виде произведения $(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)$, то имеют место следующие равенства:

- $a_1 = -(c_1 + c_2 + c_3)$,
- $a_2 = c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3$,
- $a_2 = -c_1c_2c_3$,

а корни уравнения $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ – это $c_1$, $c_2$ и $c_3$. (Фактически, это вариант утверждения теоремы Виета.)

Так как наше уравнение может (после деления на 6) быть переписано в виде $x^3 - S_1x^2 + \frac{S_1^2-S_2}{2}x - \frac{S_1^3+2S_3-3S_1S_2}{6} = 0$ и для первого коэффициента имеем $a_1 = -S_1$, то можно предположить, что корни этого уравнения $x_1 = 2$, $x_2 = 29$ и $x_3 = 2020$.

Для того, чтобы доказать эту гипотезу, достаточно показать, что

- $\frac{S_1^2-S_2}{2} = 2 \times 29 + 2 \times 2020 + 29 \times 2020$,
- $\frac{S_1^3+2S_3-3S_1S_2}{6} = 2 \times 29 \times 2020$.

Первое из этих равенств достаточно очевидно, но второе доказывается несколько более кропотливо, поэтому для упрощения доказательства введем обозначения $a = 2$, $b = 29$ и $c = 2020$.

Для первого из равенств имеем:

$$\frac{S_1^2-S_2}{2} = \frac{(a+\mathrm{b}+\mathrm{c})^2-(a^2+b^2+c^2)}{2} = \frac{2ab+2ac+2bc}{2} = ab + ac + bc;$$

Для второго из равенств имеем:

$$\frac{S_1^3+2S_3-3S_1S_2}{6} = \frac{(a+b+c)^3+2(a^3+b^3+c^3)-3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{6} =$$

$$= \frac{(a^3+b^3+c^3+3ab^2+3ac^2+3a^2b+3bc^2+3a^2c+3b^2c+6abc)+2(a^3+b^3+c^3)}{6} -$$

$$- \frac{3(a^3+b^3+c^3+ab^2+ac^2+a^2b+bc^2+a^2c+b^2c)}{6} = abc.$$

***Задача 5.*** Как получить ответ на первые два вопроса задачи – см. решение задачи 5 для 9 класса. Там же описано, как получить, что для любого $k \geq 1$ расстояние между точками $A$ и $B$ перед -ым перелетом

- от $A$ до $B$ равно $R_{2k-1} = S \times \left(\frac{(v-a)(v-b)}{(v+a)(v+b)}\right)^{k-1}$;

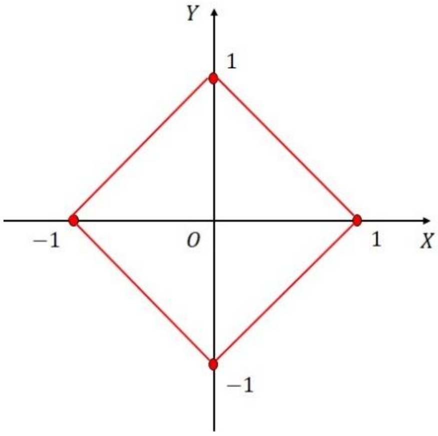
- от $B$ до $A$ равно $R_{2k} = S \times \frac{v-a}{v+b} \times \left(\frac{(v-a)(v-b)}{(v+a)(v+b)}\right)^{k-1}$.

Теперь остается заметить, что для любого $k \geq 1$ расстояние, которое пролетит точка-муха в -ый раз

- от $A$ до $B$ равно $W_{2k-1} = \frac{R_{2k-1}}{v+b} \times v = S \times \frac{v}{v+b} \times \left(\frac{(v-a)(v-b)}{(v+a)(v+b)}\right)^{k-1}$;
- от $B$ до $A$ равно $W_{2k} = \frac{R_{2k}}{v+a} \times v = S \times \frac{v}{v+b} \times \frac{v-a}{v+a} \times \left(\frac{(v-a)(v-b)}{(v+a)(v+b)}\right)^{k-1}$.

***Задача 6.*** Итак, манхэттенская окружность радиуса $R > 0$ с центром в начале координат $(0,0)$ – это множество всех точек координатной плоскости $(x, y)$ таких, что $|x - 0| + |y - 0| = R$ (то есть что $|x| + |y| = R$). В частности, для $R = 1$, данное уравнение может быть переписано в виде следующей системы ограничений (соответствующих четырем квадрантам координатной плоскости):

$$\left[\begin{array}{l} x \geq 0, y \geq 0, x + y = 1, \\ x \geq 0, y \leq 0, x - y = 1, \\ x \leq 0, y \geq 0, -x + y = 1, \\ x \leq 0, y \leq 0, -x - y = 1. \end{array}\right.$$

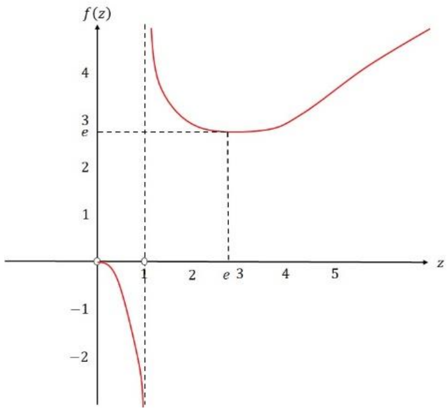



Это множество изображено на рисунке справа. Это и есть манхэттенская окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Манхэттенская длина ее манхэттенского диаметра равна $|(1) - (-1)| + |(0) - (0)| = 2$. Вычислим манхэттенские длины каждой из четырех сторон этой манхэттенской окружности (начиная с первого квадранта и далее – против часовой стрелки): $|(1) - (0)| + |(0) - (1)| = |(0) - (-1)| + |(1) - (0)| = |(0) - (-1)| + |(-1) - (0)| = |(1) - (0)| + |(0) - (-1)| = 2$.
Следовательно, манхэттенская длина манхэттенской окружности равна 8, а отношение манхэттеновской длины манхэттеновской окружности к манхэттенской длине ее диаметра равно $^8/_2 = 4$.

## 11 класс

***Задача 1.*** Случай $x = 1$ уже описан в формулировке задачи, поэтому в дальнейшем мы можем предполагать, что $x \neq 1$ и $y \neq 1$.

Возьмем натуральный логарифм от обеих частей исходного уравнения и получим следующее уравнение $x\ln y = y\ln x$. Так как $x \neq 1$ и $y \neq 1$ то это уравнение равносильно новому уравнению $^{x}/_{\ln x} = {}^{y}/_{\ln y}$.




Проанализируем функции $f(z) = {}^{z}/_{\ln z}$ и построим ее график. Так как $f'(z) = \frac{1}{\ln z} - \frac{1}{(\ln z)^2} = \frac{\ln z - 1}{(\ln z)^2}$, то на интервале $(0,1)$ функция $f$ убывает от $0$ до $-\infty$, на интервале $(1, e)$ функция $f$ тоже убывает достигая локального минимума $f(z) = e$ при $z = e$, а потом на интервале $(e, +\infty)$ возрастает от $e$ до $+\infty$.

Подведем итоги. Пусть $x > 0$ – произвольное положительное действительное число. Имеем:

- если $0 < x < 1$, то $^{x}/_{\ln x} < 0$ и, следовательно, (см. график) существует единственное вещественное число $y$ такое, что $^{x}/_{\ln x} = {}^{y}/_{\ln y}$ и, следовательно, $x^y = y^x$;
- если $x = 1$, то, как это уже было сказано, существует единственное вещественное число $y$ такое, что $x^y = y^x$;
- если $1 < x < e$ или если $x > e$ то $^{x}/_{\ln x} > e$ и, следовательно, (см. график) существуют два вещественных числа $y$ таких, что $^{x}/_{\ln x} = {}^{y}/_{\ln y}$ и, следовательно, $x^y = y^x$;
- если $x = e$, то $^{x}/_{\ln x} = e$ и, следовательно, (см. график) существует единственное вещественное число $y$ такое, что $^{x}/_{\ln x} = {}^{y}/_{\ln y}$ и, следовательно, $x^y = y^x$.

***Задача 2.*** Сначала давайте «поэкспериментируем» и вычислим «символически» значение функции $g$ для какого-либо значения $m$, близкого к $100$, например, вычислим $g(98, n)$:

1. $g(98, n) = (p_1 - 1, q_1)$ где $(p_1, q_1) = g\big(g(99, n)\big)$;
2. $g(99, n) = (p_2 - 1, q_2)$ где $(p_2, q_2) = g\big(g(100, n)\big) = g\big(100, (n+1)\big) = \big(100, (n+2)\big)$;
3. $g(99, n) = (p_2 - 1, q_2) = \big(99, (n+2)\big)$ следует из 2;
4. $(p_1, q_1) = g\big(g(99, n)\big) = g\big(99, (n+2)\big)$ следует из 1 и 3;
5. $g\big(99, (n+2)\big) = (p_3 - 1, q_3)$ где $(p_3, q_3) = g\Big(g\big(100, (n+2)\big)\Big) = g\big(100, (n+3)\big) = \big(100, (n+4)\big)$;

6. $(p_1, q_1) = \big(99, (n+4)\big)$ следует из 4 и 5;
7. $g(98, n) = \big(98, (n+4)\big)$ следует из 1 и 6.

Из этого эксперимента видно, что
- $g(100, n) = (100, n) = \big(100, (2^{100-100} + n)\big)$ – см. определение функции;
- $g(99, n) = \big(99, (n+2)\big) = \big(99, (2^{100-99} + n)\big)$ – см. пункт 3 эксперимента;
- $g(98, n) = \big(98, (n+4)\big) = \big(98, (2^{100-98} + n)\big)$ – см. пункт 7 эксперимента.

Поэтому возникает предположение, что $g(m, n) = \big(m, (2^{100-m} + n)\big)$ для любых целых значений $m \in [0..100]$ и любых целых значений $n \geq 0$.
Докажем индукцией по $m \geq 0$, что $g\big((100-m), n\big) = \big((100-m), (2^m + n)\big)$ для любого целого положительного $n \geq 0$.
База индукции $m = 0$: $g\big((100-m), n\big) = g(100, n) = \big(100, (1+n)\big) = \big((100-m), (2^m + n)\big)$ для любого $n \geq 0$.
Индукционная гипотеза: пусть для всех $k \in [0..m]$ верно $g\big((100-k), n\big) = \big((100-k), (2^k + n)\big)$ для любого $n \geq 0$.
Шаг индукции:
1. $g\Big(\big(100-(m+1)\big), n\Big) = (p-1, q)$ где $(p, q) = g\Big(g\big((100-m), n\big)\Big)$;
2. $g\big((100-m), n\big) = \big((100-m), (2^m + n)\big)$ по предположению индукции;
3. $g\Big(g\big((100-m), n\big)\Big) = g\big((100-m), (2^m + n)\big)$ согласно 2;
4. $g\big((100-m), (2^m + n)\big) = \Big((100-m), \big(2^m + (2^m + n)\big)\Big)$ по предположению индукции;
5. $g\Big(g\big((100-m), n\big)\Big) = \big((100-m), (2^{m+1} + n)\big)$ согласно 3 и 4;
6. $(p, q) = \big((100-m), (2^{m+1} + n)\big)$ согласно 1 и 5;
7. $g\Big(\big(100-(m+1)\big), n\Big) = \Big(\big(100-(m+1)\big), (2^{m+1} + n)\Big)$ согласно 1 и 6.

***Задача 3.*** Ограничим сверху число $n$ следующим образом.
Сначала заметим, что за три взвешивания на чашечных весах можно получить только 27 результатов (так как за каждое одно взвешивание на чашечных весах можно получить только 3 результата – левая чашка легче правой, чашки уравновешены, правая чашка легче левой). Но так как количество вариантов фальшивой монеты (из $n$) и ее относительного веса (легче или тяжелее) равно $2n$, то должно выполняться неравенство $2n \leq 27$. Следовательно, $n \leq 13$. – Но (см. задачу 3 для 9 класса) невозможно за 3 взвешивания на чашечных весах найти среди 13 монет единственную фальшивую (отличного от остальных весом) и одновременно определить ее относительный вес. Поэтому надо рассмотреть $n = 12$.
В описании способа (алгоритм) определения фальшивой монеты будем

использовать следующие обозначения:

- монеты будем обозначать (1), (2), … (14), а гирьку (15);
- выражения вида (p+q)?(r+s) для взвешивания, в котором, в данном случае, пара монет p и q помещены на левую чашку весов, а пара других монет r и s (тоже из монет и гирьки) – на правую;
- у взвешивания (p+q)?(r+s) может быть три исхода: < (если левая чашка легче), = (если чашки уравновешены) и > (если правая чашка легче).

Теперь мы можем дать комментированное описание способа (алгоритма), который получает 12 монет (1)..(12), среди которых ровно одна фальшивая имеет вес, отличный от веса других настоящих монет равного веса, и определяет фальшивую монету и ее относительный вес за три взвешивания на чашечных весах:

**case ((1)+…(4))?((5)+…(8)) of:**

- = (то есть фальшивая среди (9)..(12), а все (1)..(8) - настоящие): **case ((1)+(9))?((10)+(11)) of:**
  - = (то есть фальшивая (12)): **case ((1))?((12)):**
    - <: фальшивая монета (12) и тяжелее;
    - >: фальшивая монета (12) и легче;
  - < (то есть фальшивая среди (9) и легче или среди (10) и (11) и тяжелее): **case ((10))?((11)):**
    - = (возможно только если (9) фальшивая и легче): фальшивая монета (9) и легче;
    - < (возможно только если (11) фальшивая и тяжелее): фальшивая монета (11) и тяжелее;
    - > (возможно только если (10) фальшивая и тяжелее): фальшивая монета (10) и тяжелее;
  - > (то есть фальшивая среди (9) и тяжелее или среди (10) и (11) и легче): **case ((10))?((11)):**
    - = (возможно только если (9) фальшивая и тяжелее): фальшивая монета (9) и тяжелее;
    - < (возможно только если (10) фальшивая и легче): фальшивая монета (10) и легче;
    - > (возможно только если (11) фальшивая и легче): фальшивая монета (11) и легче;
- < (то есть фальшивая среди (1)..(4) и легче, или среди (5)..(8) и тяжелее, а все (9)..(12) – настоящие): **case ((1)+(2)+(5)+(6))?((3)+(9)+(10)+(11)) of:**
  - = (то есть фальшивая среди (4) и легче, или (7) и (8) и тяжелее, а все остальные монеты – настоящие): **case ((7))?((8)) of:**
    - = (возможно только если фальшивая (4) и легче): фальшивая монета (4) и легче;

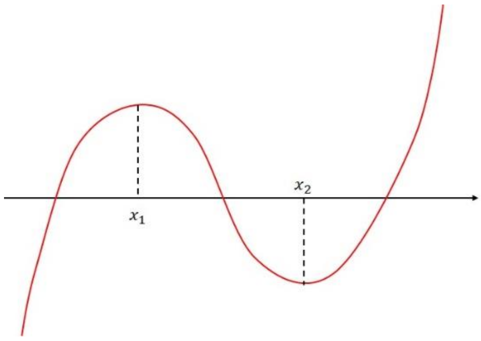
        - < (возможна только если фальшивая (8) и тяжелее): фальшивая монета (8) и тяжелее;
        - > (возможна только если фальшивая (7) и тяжелее): фальшивая монета (7) и тяжелее;
    - < (возможно только если фальшивая среди (1) и (2) и легче): **case ((1))?((2)) of:**
        - < (возможна только если фальшивая (1) и легче): фальшивая монета (1) и легче;
        - > (возможна только если фальшивая (2) и легче): фальшивая монета (2) и легче;
    - > (возможно только если фальшивая среди (5) и (6) и тяжелее): **case ((5))?((6)) of:**
        - < (возможна только если фальшивая (6) и тяжелее): фальшивая монета (6) и тяжелее;
        - > (возможна только если фальшивая (5) и тяжелее): фальшивая монета (5) и тяжелее;
- > (то есть фальшивая среди (1)..(4) и тяжелее, или среди (5)..(8) и легче, а все (9)..(12) – настоящие): **case ((1)+(2)+(5)+(6))?((3)+(9)+(10)+(11)) of:**
    - = (то есть фальшивая среди (4) и тяжелее, или (7) и (8) и легче, а все остальные монеты – настоящие): **case ((7))?((8)) of:**
        - = (возможно только если фальшивая (4) и тяжелее): фальшивая монета (4) и тяжелее;
        - < (возможна только если фальшивая (7) и легче): фальшивая монета (7) и легче;
        - > (возможна только если фальшивая (8) и легче): фальшивая монета (8) и легче;
    - < (возможно только если фальшивая среди (3) и тяжелее или (5) и (6) и легче): **case ((5))?((6)) of:**
        - = (возможно только если фальшивая (3) и тяжелее): фальшивая монета (3) и тяжелее;
        - < (возможна только если фальшивая (5) и легче): фальшивая монета (5) и легче;
        - > (возможна только если фальшивая (6) и легче): фальшивая монета (6) и легче;
    - > (возможно только если фальшивая среди (1) и (2) и тяжелее): **case ((1))?((2)) of:**
        - < (возможна только если фальшивая (2) и тяжелее): фальшивая монета (2) и тяжелее;
        - > (возможна только если фальшивая (1) и тяжелее): фальшивая монета (1) и тяжелее.

Итак, искомое $n = 12$. Корректность и полнота способа (алгоритма) следует из описания алгоритма и комментариев.

***Задача 4.*** Рассмотрим функцию функция $y(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ с вещественными коэффициентами.

Сначала заметим, что такая функция обязательно имеет (хотя бы) один корень на $(-\infty, +\infty)$ так как $y(-\infty) = -\infty$ и $y(+\infty) = +\infty$, поэтому ее график «где-то» должен пересечь ось абсцисс.

Далее заметим, что если такая функция имеет две точки локальных экстремумов $x_1 < x_2$ на $(-\infty, +\infty)$, то первая из них $x_1$ – обязательно локальный максимум, а $x_2$ – обязательно локальный минимум (см. рисунок справа).




И, наконец, заметим, что такая функция с двумя локальными экстремумами имеет три разных корня тогда и только тогда, когда $y(x_1) \geq 0$, а $y(x_2) \leq 0$ (см. рисунок справа).

Найдем точки экстремумов функции $y(x) = x^3 + 29x^2 + 2x + 20$ на $(-\infty, +\infty)$. Так как $y'(x) = 3x^2 + 58x + 2$, то точки локальных экстремумов – это корни уравнения $3x^2 + 58x + 2 = 0$, то есть точки $x_1 = \frac{-58-\sqrt{3340}}{6}$ $(\approx -19{,}2988)$ и $x_1 = \frac{-58+\sqrt{3340}}{6}$ $(\approx -0{,}0345)$.

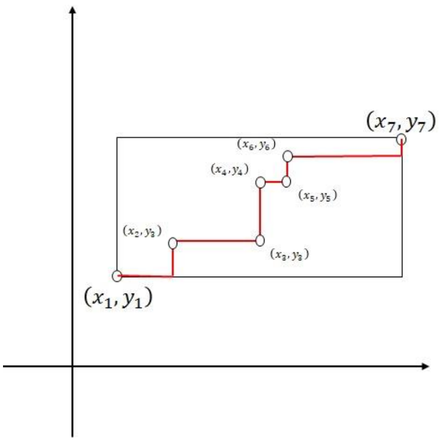
Теперь нам надо вычислить значения функции $y(x) = x^3 + 29x^2 + 2x + 20$ в найденных точках экстремумов. Для того, чтобы упростить наши вычисления, воспользуемся тем, что в этих точках производная равна нулю: $y(x) = x^3 + 29x^2 + 2x + 20 = \left(\frac{1}{3}x + \frac{29}{9}\right)(3x^2 + 58x + 2) + \left(-\frac{1670}{9}x + \frac{122}{9}\right)$. В соответствии с этим представлением имеем: $y(x_1) = -\frac{1670}{9}x_1 + \frac{122}{9} > 0$ и $y(x_2) = -\frac{1670}{9}x_2 + \frac{122}{9} > 0$. Следовательно, уравнение $x^3 + 29x^2 + 2x + 20 = 0$ не может иметь более одного (вещественного) корня.

***Задача 5.*** Как получить ответ на первые два вопроса задачи – см. решение задачи 5 для 9 класса.

В задаче 5 для 10 класса описано, как получить, что для любого $k \geq 1$ расстояние, которое пролетит точка-муха в -ый раз от $A$ до $B$ равно $W_{2k-1} = S \times \frac{v}{v+b} \times \left(\frac{(v-a)(v-b)}{(v+a)(v+b)}\right)^{k-1}$. Легко видеть, что перед нами бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{(v-a)(v-b)}{(v+a)(v+b)}$ и первым членом $S \times \frac{v}{v+b}$. Следовательно, сумма этой прогрессии равна $S \times \frac{v}{v+b} \times \frac{1}{1-\frac{(v-a)(v-b)}{(v+a)(v+b)}} = \frac{S(v+a)}{2(a+b)}$, это и есть суммарное расстояние, которое пролетит точка-муха, когда движется от $A$ до $B$.

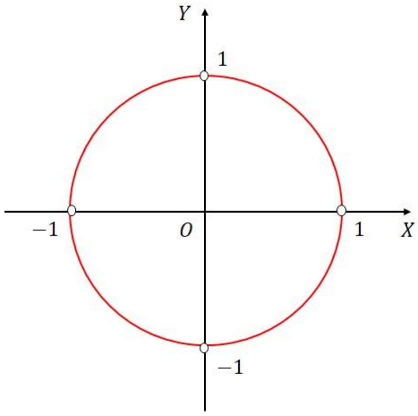
Так как общее расстояние, которое пролетит точка-муха, равно $\frac{Sv}{a+b}$, то, следовательно, суммарное расстояние, которое пролетит точка-муха, когда движется от $B$ до $A$, равно $\frac{Sv}{a+b} - \frac{S(v+a)}{2(a+b)} = \frac{S(v-a)}{2(a+b)}$.

***Задача 6.*** Рассмотрим произвольную ломаную (см., например, рисунок справа) такую, что абсциссы ее узлов ведут себя монотонно (на рисунке они не убывают) и ординаты ее узлов тоже ведут себя (возможно, по-другому, но тоже) монотонно (на рисунке они тоже не убывают). Тогда манхэттенская длинна такой ломаной (то есть сумма манхэттенских длин ее отрезков) равна манхэттенскому расстоянию между ее концами.




Доказательство этого утверждения должно рассматривать разные варианты (абсциссы и ординаты не убываю, абсциссы не убывают, а ординаты не возрастают, и так далее), но мы ограничимся только случаем, представленным на рисунке: $(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|) + (|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|) + (|x_4 - x_3| + |y_4 - y_3|) + (|x_5 - x_4| + |y_5 - y_4|) + (|x_6 - x_5| + |y_6 - y_5|) + (|x_7 - x_6| + |y_7 - y_6|) = \big((x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)\big) + \big((x_3 - x_2) + (y_3 - y_2)\big) + \big((x_4 - x_3) + (y_4 - y_3)\big) + \big((x_5 - x_4) + (y_5 - y_4)\big) + \big((x_6 - x_5) + (y_6 - y_5)\big) + \big((x_7 - x_6) + (y_7 - y_6)\big) = (x_7 - x_1) + (y_7 - y_1) = |x_7 - x_1| + |y_7 - y_1|$.

Следовательно, манхэттенская длина каждого из четырех сегментов $\big(\widehat{(1,0),(0,1)}\big)$, $\big(\widehat{(0,1),(-1,0)}\big)$, $\big(\widehat{(-1,0),(0,-1)}\big)$ и $\big(\widehat{(0,-1),(1,0)}\big)$ Евклидовой окружности манхэттенского радиуса 1 с центром в начале координат равны $2 = |0-1| + |1-0| = |(-1)-0| + |0-1| = |0-(-1)| + |(-1)-0| = |1-0| + |0-(-1)|$, манхэттенская длина всей этой Евклидовой окружности равна 8, а отношение манхэттенской длинны Евклидовой окружности к манхэттенской длине ее диаметра равно $8/2 = 4$.




## ЗАДАНИЯ 2020–2021 УЧЕБНОГО ГОДА

### Задания 1-го отборочного тура

**7–9 класс**

***Задача 1 (текстовые задачи).*** В полдень часовая и минутная стрелки механических часов с круглым циферблатом совпадают, то есть угол между ними равен 0°. Через сколько минут после этого стрелки в 5-й раз образуют угол 22.5° (каждая стрелка движется с постоянной угловой скоростью, а углом между стрелками считается меньший из двух образуемых ими углов)?

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 2 (планиметрия).*** В $\triangle ABC$ провели биссектрису $BL$ и оказалось, что $BC+CL = AB$. Зная, что $\angle ABC = 120°$, найдите $\angle BAC$ (ответ дайте в градусах).

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 3 (представление числа).*** Обозначим через $R(n)$ разность шестизначного натурального $n$ и числа, образованного первыми тремя его цифрами (например, $R(123456) = 123456-123 = 123333$). Сколько существует шестизначных $n$, для которых $R(n)$ делится на 9?

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 4 (графы).*** В некотором королевстве были 33 рыцаря, причем некоторые из них были вассалами других. Вассал может иметь только одного сюзерена, причем сюзерен всегда богаче своего вассала. Кроме того, в королевстве действовал закон: ’вассал моего вассала - не мой вассал’, а рыцарь, имевший не менее четырех вассалов, носил титул барона. Какое наибольшее число баронов могло быть при всех этих условиях?

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 5 (комбинаторика).*** На каждом неграничном единичном отрезке доски $8 \times 8$ поставили число, равное количеству разбиений доски на доминошки, в которых этот отрезок лежит на границе доминошки. Какова последняя цифра суммы всех написанных чисел?

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 6 (индукция, рекуррентные соотношения).*** Последовательность слов $w_0$, $w_1$, $w_2$, $w_3$, ... строится следующим рекуррентным образом: $w_0 = a$ и $wn = (w_{n-1}(w_{n-1}))$ для любого натурального $n$. Таким образом, $w_0 = a$, $w_1 = (a(a))$, $w_2 = ((a(a))((a(a))))$ и так далее. Пусть значение функции $L(n)$ для натурального $n$ равно количеству символов в слове $w_n$. Найдите $L(2021) - L(2019)$.

*(Н.В. Шилов)*

## 10 класс

***Задача 1 (рекуррентные соотношения).*** Последовательность слов $w_0$, $w_1$, $w_2$, ... строится следующим рекуррентным образом: $w_0 = a$, $w_1 = b$ и $w_{n+1} = w_{n-1}w_n$ (то есть последовательное соединение слов $w_n$ и $w_{n-1}$) для любого натурального $n$. Таким образом, эта последовательность слов начинается с $w_0 = a$, $w_1 = b$, $w_2 = ab$, $w_3 = bab$, $w_4 = abbab$. Сколько раз слово $ab$ встречается в записи слова $w_{24}$?

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 2 (планиметрия).*** В треугольнике со сторонами 7, 8 и 10 на наибольшую сторону из противолежащей вершины опущены высота и биссектриса. Найдите отношение площади треугольника, ограниченного этими высотой, биссектрисой и основанием к площади всего треугольника. Ответ запишите в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 3 (алгебраические уравнения, неравенства).*** Найдите наименьшее положительное $a$, для которого $\sqrt[3]{2+\sqrt{a}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{a}}$ является целым. Ответ запишите в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 4 (комбинаторика).*** В волейбольном турнире участвовали 19 команд. Назовем тройку команд $(A,\ B,\ C)$ непонятной, если команда $A$ выиграла у команды $B$, команда $B$ - у команды $C$, а команда $C$ - у команды $A$. Найдите наибольшее количество непонятных троек.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 5 (геометрические построения).*** На плоскости заданы сторона и один из прилегающих к ней углов треугольника. Известно, что величины двух других углов относятся как $5:11$. Опишите алгоритм построения этого треугольника с помощью циркуля и линейки.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 6 (теория чисел).*** Решите уравнение $x\sqrt{2}+y\sqrt{3}+z\sqrt{5}=0$ в рациональных числах.

*(Н.В. Шилов)*

**11 класс**

***Задача 1 (теория чисел).*** Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^{13}-n$, где $n$ - произвольное натуральное число.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 2 (прогрессия).*** Число 6 является седьмым членом арифметической прогрессии, разность которой такова, что произведение пятого и одиннадцатого ее членов имеет максимальное возможное значение именно при данном значении ее разности. Найдите разность этой прогрессии. Представьте ответ в виде десятичной дроби, округлив ее до сотых.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 3 (алгебраические уравнения, многочлены).*** Найти количество троек целых чисел $x\le y\le z$, таких, что $x+y+z=x^3+y^3+z^3=3$.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 4 (теория чисел).*** Весом натурального числа $n$ назовем величину $k^2 + k + 1$, где $k$ - показатель степени, с которым 2 входит в разложение $n$ в произведение простых чисел. Например, вес числа 1 равен 1 (т.е. $0^2 + 0 + 1$), а вес числа 4 равен 7 (т.е. $2^2 + 2 + 1$). Весом отрезка чисел $[1, n]$ назовем сумму весов всех натуральных чисел от 1 до $n$.
Найдите минимальное $n$, при котором вес отрезка $[1, n]$ больше или равен 1000.

*(А.А. Гаврилюк)*

***Задача 5 (теория чисел).*** Решите уравнение $x\sqrt{3} + y\sqrt{11} = z$ в рациональных числах.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 6 (стереометрия).*** Четыре грани некоторого тетраэдра — это равные неравнобедренные треугольники со сторонами $x, y$ и $z$, а радиус сферы, описанной около этого тетраэдра, равен 1. Вычислите величину $x^2 + y^2 + z^2$.

*(А.А. Гаврилюк)*

## Задания 2-го отборочного тура

### 7–9 класс

***Задача 1 (неравенства).*** Найдите наименьшее возможное значение суммы $a + b$, где $a$ и $b$ - натуральные числа и $\frac{205}{206} < \frac{a}{b} < \frac{206}{207}$.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 2 (текстовые задачи).*** Комиссия из 9 судей оценивает троих участников соревнования. Для этого каждый из судей выставляет лучшему, по его мнению, участнику, 3 балла, худшему – 1 балл, а оставшемуся – 2 балла. В результате все участники набрали разное количество очков. Один судья заметил, что победитель набрал меньше всего троек, а занявший последнее место – больше всего троек. Сколько двоек набрал победитель?

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 3 (планиметрия).*** Точка $D$ лежит внутри прямоугольного $\triangle ABC$ с прямым углом $B$. Пусть $S_{\triangle ABD}$, $S_{\triangle CBD}$, $S_{\triangle ABC}$ – площади $\triangle ABD$, $\triangle CBD$, $\triangle ABC$ соответственно. Известно, что $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle ABC} = 1 : 2$, $S_{\triangle CBD} : S_{\triangle ABC} = 1 : 5$, а длины отрезков $AD$ и $CD$ равны соответственно 4 и 3. Найдите площадь квадрата, стороной которого является отрезок $BD$. Ответ округлите до ближайшего целого числа.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 4 (индукция, математические игры).*** В ряд записаны 1234 целых числа. За один шаг первый игрок указывает на несколько из них, записанных подряд, а второй игрок либо увеличивает каждое из указанных чисел на 1, либо уменьшает каждое из них на 1. Найдите наибольшее $k$, такое, для которого первый всегда за несколько шагов сможет добиться, чтобы хотя бы $k$ чисел стали делиться на 3.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 5 (числовые последовательности).*** Дан 11-угольник $A_1A_2...A_{11}$ и последовательность точек $X_0$, $X_1$, $X_2$,. . . на сторонах этого многоугольника, такая, что точка $X_0$ лежит на стороне $A_1A_{11}$ и для любого целого $k \geq 0$ точка $X_{11k+1}$ – на стороне $A_1A_2$, точка $X_{11k+2}$ – на стороне $A_2A_3$, . . . , точка $X_{11(k+1)}$ – на стороне $A_{11}A_1$, причем $A_1X_{11k} = A_1X_{11k+1}$, $A_2X_{11k+1} = A_2X_{11k+2}$, $A_3X_{11k+2} = A_3X_{11k+3}$, . . . , $A_{11}X_{11k+10} = A_{11}X_{11(k+1)}$. Докажите, что последовательность точек $X_0$, $X_1$, $X_2$, . . . состоит из конечного множества точек. Укажите верхнюю границу для числа $n$ различных точек в этой последовательности и покажите, что эта граница достижима (то есть существует такой многоугольник $A_1A_2...A_{11}$ и последовательность точек $X_0$, $X_1$, $X_2$, . . ., построенная по описанным правилам, в которой ровно $n$ различных точек).

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 6 (многочлены).*** Вещественные числа $x, y, z$ удовлетворяют соотношениям $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Докажите, что среди этих чисел найдутся два, расстояние между которыми не меньше 1.

*(П.В. Бибиков)*

## 10 класс

***Задача 1 (текстовые задачи).*** В полдень часовая и минутная стрелки механических часов с круглым циферблатом совпадают, то есть угол между ними равен 0°. Сколько минут с 12:00 до 13:00 того же дня угол между минутной и часовой стрелкой составит не больше 59° (каждая стрелка движется с постоянной угловой скоростью, а углом между стрелками считается меньший из двух образуемых ими углов)?

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 2 (неравенства).*** Однажды ребенок, которому было не меньше 7 и не больше 12 лет, написал уравнение:

$$y \cdot x^2 + k \cdot x + y + k = 0,$$

в котором вместо $y$ стоял год его рождения (целое неотрицательное число), вместо $k$ – его возраст на тот момент (натуральное число), а $y + k$ – год, в который было написано это уравнение, которое, как оказалось, имеет вещественные корни. В каком году мог родиться этот ребенок? В ответ запишите сумму всех возможных значений $y$.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 3 (планиметрия).*** Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, длина стороны $AB$ равна 8, диагонали $AC$ – 5, $\angle CAD = 2\angle CBA = 3\angle ACD$. Пусть $PQ$ – срединный перпендикуляр к стороне $AB$ (с основанием в точке $P$), $QD$ – биссектриса $\angle ADC$. Найдите расстояние $PQ$.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 4 (математические игры).*** В ряд записаны 1200 целых чисел. За один шаг первый игрок указывает на несколько из них, записанных подряд, а второй игрок либо увеличивает каждое из указанных чисел на 1, либо уменьшает каждое из них на 1. Найдите наибольшее $k$, такое, для которого первый всегда за несколько шагов сможет добиться, чтобы хотя бы $k$ чисел стали делиться на 3.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 5 (числовые последовательности).*** Дан 57-угольник $A_1A_2. . . A_{57}$ и последовательность точек $X_0$, $X_1$, $X_2$,. . . на сторонах этого многоугольника, такая, что точка $X_0$ лежит на стороне $A_1A_{57}$ и для любого целого $k \geq 0$ точка $X_{57k+1}$ – на стороне $A_1A_2$, точка $X_{57k+2}$ – на стороне $A_2A_3$, . . . , точка $X_{57(k+1)}$ – на стороне $A_{57}A_1$, причем $A_1X_{57k} = A_1X_{57k+1}$, $A_2X_{57k+1} = A_2X_{57k+2}$, $A_3X_{57k+2} = A_3X_{57k+3}$, . . . , $A_{57}X_{57k+56} = A_{57}X_{57(k+1)}$. Докажите, что последовательность точек $X_0$, $X_1$, $X_2$, . . . состоит из конечного множества точек. Укажите верхнюю границу для числа $n$ различных точек в этой последовательности и покажите, что эта граница достижима (то есть существует такой многоугольник $A_1A_2. . . A_{57}$ и последовательность точек $X_0$, $X_1$, $X_2$, . . ., построенная по описанным правилам, в которой ровно $n$ различных точек).

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 6 (рекуррентные соотношения).*** Последовательность $x_1$, $x_2$, ... задана следующим рекуррентным образом: $x_0 = 1$ и $x_{n+1} = (16/x_{\text{n}})^{1/4}$ для любого целого неотрицательного $n$. Докажите, что найдется $n_0$, такое, что $x_n \leq 2$ для всех $n \geq n_0$.

*(Н.В. Шилов)*

## 11 класс

***Задача 1 (оценка+пример).*** Предприниматель арендовал место на складе и ему на этот склад были доставлены 3000 посылок. У начальника склада есть стандартные формы распоряжений для охраны склада: "Удержать посылки №№"и "Отпустить посылки №№". Начальник склада и предприниматель играют в следующую игру: за один ход начальник вписывает произвольные номера посылок в одну такую форму, отдает предпринимателю, а предприниматель оставляет в ней одно из слов – "удержать" или "отпустить". Далее, если предприниматель попросит, начальник склада выписывает новое распоряжение (номера посылок в нем могут совпадать с номерами посылок в предыдущих распоряжениях). Если в распоряжении остается слово "отпустить то предприниматель забирает со склада все посылки, перечисленные в этой бумаге. Если же остается слово "удержать то предприниматель забирает со склада все посылки, НЕ указанные в этой бумаге. Какого количества таких бумаг предпринимателю гарантированно хватит, чтобы забрать все посылки со склада?

*(А.А. Гаврилюк)*

***Задача 2 (анализ).*** Сколько вещественных корней имеет уравнение $1994 \cdot x^{1994} + 26 \cdot x^{26} = 2020$?

***Задача 3 (планиметрия).*** Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка $P$ внутри него. $AB = 7\sqrt{2}$, $AP = 3\sqrt{11}$, $\angle PAD = 22.5°$, $\angle PBA = 45°$, $\angle APD = 67.5°$, $\angle PBC = \beta$, $\angle PAB = 2\beta$, $\angle BPC = 3\beta$. Найдите расстояние от точки пересечения биссектрис углов $ADP$ и $BCP$ до прямой $AB$.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 4 (многочлены).*** Многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 + 6x^2 + cx + 1$ имеет четыре вещественных корня: $x_1, x_2, x_3, x_4$. Найти наименьшее возможное значение выражения $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1)$.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 5 (числовые последовательности).*** Дан 80-угольник $A_1A_2 \ldots A_{80}$, такой, что сумма длин четных сторон не равна сумме длин нечетных сторон (то есть $A_1A_2 + A_3A_4 + \cdots + A_{79}A_{80} \neq A_2A_3 + A_4A_5 + \cdots + A_{80}A_1$). Докажите, что не существует такой бесконечной последовательности точек $X_0, X_1, X_2, \ldots$ на сторонах этого многоугольника, что точка $X_0$ лежит на стороне $A_{80}A_1$ и для любого целого $k \geq 0$ точка $X_{80k+1}$ лежит на стороне $A_1A_2$, точка $X_{80k+2}$ – на стороне $A_2A_3, \ldots$, точка $X_{80(k+1)}$ – на стороне $A_{80}A_1$, причем $A_1X_{80k} = A_1X_{80k+1}$, $A_2X_{80k+1} = A_2X_{80k+2}$, ..., $A_{80}X_{80k+79} = A_{80}X_{80(k+1)}$.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 6 (графы).*** В школьном классе сидели 10 учеников, каждому из которых присвоен номер (натуральное число от 1 до 10), все номера при этом различны. Учитель случайным образом раздал каждому ученику по одной карточке, на которой написано натуральное число от 1 до 10 (числа на всех карточках также различны). Далее начинается игра по следующим правилам: любые два ученика могут обменяться своими карточками, но лишь один раз (второй прямой обмен между этими же учениками запрещен), затем другая пара и т. д.

Цель игры - добиться того, чтобы номер каждого ученика совпадал с номером его карточки. Всегда ли такой исход достижим? Если нет, то учитель может пригласить в класс дополнительно $n$ учеников, раздать им номера с 11 по (10+$n$)-й и карточки с соответствующими им номерами. При каком наименьшем $n$ цель игры может быть гарантированно достигнута при любом начальном распределении карточек? Ученики получают карточки открыто, их номера известны всем.

*(П.В. Бибиков)*

## Задания финального тура

### 7–9 класс

***Задача 1 (представление числа).*** В 101-значной десятичной записи числа $n$ используются 11 единиц с равным количеством нулей между ними (других цифр в записи нет). Найдите сумму цифр десятичной записи числа $n^2$.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 2 (числовые последовательности).*** Числовые ряды использовались в математике на протяжении всей истории науки, и вопросы суммируемости рядов возникали с античных времен. Для сходящихся рядов сумма их слагаемых – число. Для расходящихся рядов сумма всех слагаемых либо не ограничена, либо не определена. Однако, расходящиеся ряды оказываются полезными как в теоретических построениях, так и в прямых вычислениях.

В XVIII веке Леонард Эйлер рассматривал расходящиеся ряды не как сумму их слагаемых, а как формальное выражение, возникшее из какой-либо функциональной зависимости и позволяющее исследовать свойства такой зависимости. В конце XIX века Анри Пуанкаре дал определение асимптотического (вообще говоря, расходящегося) ряда и показал, как строго обосновать использование таких рядов в небесной механике. В самом начале XX века Эмиль Борель ввел одно из наиболее общих определений для расходящихся рядов. Теперь такие ряды широко используются в современной математической физике: например, в задачах квантовой механики.

Примем, что сумма числового ряда $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ удовлетворяет следующим равенствам:

1. $s = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} k a_n = ks, k \in R$.
3. $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n, t = \sum_{n=0}^{\infty} b_n, => s + t = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 4^n + 8^n - \cdots + (-1)^{p+1} \cdot 2^{pn})$$

Здесь $p > 1$ – натуральное число. Докажите, что сумма по Борелю $S$ этого ряда удовлетворяет неравенству $S > -1$.

*(О.М. Киселев)*

***Задача 3 (комбинаторика, теория вероятностей).*** На координатной плоскости в точках (0, 0) и ($2m$+1, 0) размещены два робота, размерами которых можно пренебречь.

Каждую секунду каждый робот перемещается на вектор длины 1 в одном из двух направлений, случайно выбираемом в начале каждой секунды: первый робот перемещается либо на вектор (1, 0), либо на вектор (0, 1), а второй робот (тот, что начинает движение из точки ($2m$ + 1, 0)) – либо на вектор (−1, 0), либо на вектор (0, 1). Также им запрещается выезжать за пределы прямоугольника, стороны которого лежат на прямых $x = 0$, $y = 0$, $x = 2m + 1$, $y = n$ ($m$ и $n$ - натуральные числа).

Если робот не может двигаться ни в одном из разрешенных направлений, он выключается. Если два робота одновременно оказались в одной точке, они сталкиваются и ломаются. Найдите вероятность того, что роботы НЕ сломаются до того, как оба выключатся.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 4 (текстовые задачи, инвариант).*** Дан клетчатый прямоугольник $2m \times 2n$, разбитый произвольным образом на доминошки 2 × 1. Если две доминошки образуют квадрат 2×2, разрешается повернуть их обе на 90° (сделать флип). Наша цель — последовательностью флипов сделать все доминошки горизонтальными (кирпичная кладка) за как можно меньшее количество операций.

Раскрасим наш прямоугольник в шахматную раскраску, считая левый нижний угол черным. Направим по сторонам квадратиков стрелочки так, чтобы черные квадратики обходились бы против часовой стрелки, а белые — по часовой стрелке.

Пусть нам дано некоторое замощение прямоугольника доминошками, которое мы обозначим через $T$. Сопоставим замощению его функцию высоты — это будет функция на вершинах клеток нашего прямоугольника, которую мы будем обозначать $H_T(v)$. Определим ее следующим образом. Выберем левую нижнюю вершину $v_0$ прямоугольника и положим ее высоту равной нулю; далее, каждую вершину $v$ соединим с $v_0$ путем, который проходит по линиям сетки и не пересекает доминошек. Этот путь состоит из стрелок, каждая из которых проходится либо в попутном направлении (т. е. сонаправлена с путем), либо в противоположном. Положим высоту $H_T(v)$ равной разности числа попутных и противоположно направленных стрелок.

1) Докажите, что так определенное значение функции высоты $H_T(v)$ не зависит от выбора пути, соединяющего $v_0$ с $v$.

2) Назовем кирпичной кладкой разбиение $T_{\min}$, в котором все доминошки горизонтальны. Назовем приведенной высотой разбиения $T$ величину $h_T(v) = |H_T(v) - H_{T_{\min}}(v)|/4$. Как меняется приведенная высота разбиения при совершении одного флипа?

*(П.В. Бибиков)*

**10 класс**

***Задача 1 (алгебраические уравнения).*** Решите уравнение

$$\sqrt{x\cdot\sqrt[4]{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt[4]{\ldots}}}}=1024$$

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 2 (анализ).*** Дана точка $A_0$ координатной плоскости. Строится последовательность $\{A_k\}$ точек этой плоскости, такая, что для всякого натурального $k$ точка $A_k$ получается из $A_{k-1}$ одним из следующих действий:

1. симметрией относительно прямой $x = 1$;
2. симметрией относительно прямой $y = 1$;
3. инверсией относительно окружности $x^2 + y^2 = 1$. В таком случае точка $A_k$ лежит на луче с началом в точке $O$ (начало координат), проходящем через точку $A_{k-1}$, причем $|OA_{k-1}|\cdot|OA_k| = 1$.

Найдите наименьшее $n$, при котором гарантированно удастся построить последовательность $\{A_k\}$ с условием, что расстояние от $A_n$ до точки $(1, 1)$ не превосходит $10^{-3}$.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 3 (текстовые задачи, инвариант, графы).*** Дан клетчатый прямоугольник $2m \times 2n$, разбитый произвольным образом на доминошки $2 \times 1$. Если две доминошки образуют квадрат $2{\times}2$, разрешается повернуть их обе на $90^\circ$ (сделать флип). Наша цель — последовательностью флипов сделать все доминошки горизонтальными (кирпичная кладка) за как можно меньшее количество операций.

Раскрасим наш прямоугольник в шахматную раскраску, считая левый нижний угол черным. Направим по сторонам квадратиков стрелочки так, чтобы черные квадратики обходились бы против часовой стрелки, а белые — по часовой стрелке.

Пусть нам дано некоторое замощение прямоугольника доминошками, которое мы обозначим через $T$. Сопоставим замощению его функцию высоты — это будет функция на вершинах клеток нашего прямоугольника, которую мы будем обозначать $H_T(v)$. Определим ее следующим образом. Выберем левую нижнюю вершину $v_0$ прямоугольника и положим ее высоту равной нулю; далее, каждую вершину $v$ соединим с $v_0$ путем, который проходит по линиям сетки и не пересекает доминошек. Этот путь состоит из стрелок, каждая из которых проходится либо в попутном направлении (т. е. сонаправлена с путем), либо в противоположном. Положим высоту $H_T(v)$ равной разности числа попутных и противоположно направленных стрелок.

Пусть $H(v)$ — функция на вершинах графа $G$, удовлетворяющая следующему свойству: для любых соседних вершин $u$ и $v$, ребро между которыми направлено от $u$ к $v$, либо $H(v) = H(u) + 1$, либо $H(v) = H(u) - 3$. Докажите, что $H(v)$ является функцией высоты единственного замощения T.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 4 (планиметрия).*** Дан треугольник $ABC$. Докажите, что существует единственный набор таких трёх окружностей $\omega_A$, $\omega_B$ и $\omega_C$, которые лежат внутри треугольника, попарно друг друга касаются, а также каждая из них касается сторон соответствующего угла: $\omega_A$ касается сторон $AB$ и $AC$, $\omega_B$ касается сторон $BA$ и $BC$, $\omega_C$ касается сторон $CA$ и $CB$.

*(А.А. Гаврилюк)*

**11 класс**

***Задача 1 (анализ).*** Решите уравнение

$$\log_{25}(x - 500) - \log_x 25 = 1$$

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 2 (планиметрия).*** Дан треугольник $ABC$. Существует единственный набор таких трёх окружностей $\omega_A$, $\omega_B$ и $\omega_C$, которые лежат внутри треугольника, попарно друг друга касаются, а также каждая из них касается сторон соответствующего угла: $\omega_A$ касается сторон $AB$ и $AC$, $\omega_B$ касается сторон $BA$ и $BC$, $\omega_C$ касается сторон $CA$ и $CB$. Обозначим точку касания окружностей $\omega_A$ и $\omega_B$ как $T_{AB}$. Аналогично определяются точки $T_{AC}$ и $T_{BC}$.
Дизайнер хочет сконструировать люстру-витраж из цветного стекла, в которой стороны треугольника $ABC$ – это прочный (пренебрежимо) лёгкий контур, в который вписан массивный плоский диск весом 1 кг, а также добавлены уравновешивающие веса в вершинах $A$, $B$ и $C$ треугольника так, чтобы точка подвеса люстры находилась на пересечении отрезков $AT_{BC}$, $BT_{AC}$ и $CT_{AB}$ (остальные детали люстры имеют пренебрежимо малый вес).
Докажите, что такой проект люстры осуществим и определите уравновешивающие веса в вершинах (то есть такие, чтобы люстра висела горизонтально, закреплённая только в точке подвеса), если радиусы окружностей $\omega$ – это $r_A$, $r_B$, $r_C$, а радиус вписанного диска треугольника равен $r$.

*(А.А. Гаврилюк)*

***Задача 3 (текстовые задачи, инвариант, графы).*** Дан клетчатый прямоугольник $2m \times 2n$, разбитый произвольным образом на доминошки $2 \times 1$. Если две доминошки образуют квадрат 2×2, разрешается повернуть их обе на 90° (сделать флип). Наша цель — последовательностью флипов сделать все доминошки горизонтальными (кирпичная кладка) за как можно меньшее количество операций. Раскрасим наш прямоугольник в шахматную раскраску, считая левый нижний угол черным. Направим по сторонам квадратиков стрелочки так, чтобы черные квадратики обходились бы против часовой стрелки, а белые — по часовой стрелке.

Пусть нам дано некоторое замощение прямоугольника доминошками, которое мы обозначим через $T$. Сопоставим замощению его функцию высоты — это будет функция на вершинах клеток нашего прямоугольника, которую мы будем обозначать $H_T(v)$. Определим ее следующим образом. Выберем левую нижнюю вершину $v_0$ прямоугольника и положим ее высоту равной нулю; далее, каждую вершину $v$ соединим с $v_0$ путем, который проходит по линиям сетки и не пересекает доминошек. Этот путь состоит из стрелок, каждая из которых проходится либо в попутном направлении (т. е. сонаправлена с путем), либо в противоположном. Положим высоту $H_T(v)$ равной разности числа попутных и противоположно направленных стрелок.

Назовем кирпичной кладкой разбиение $T_{\min}$, в котором все доминошки горизонтальны. Назовем приведенной высотой разбиения $T$ величину $h_T(v) = |H_T(v) - H_{T\min}(v)|/4$. Назовем рангом замощения $T$ число $r(T) = \sum h_T(v)$. Докажите, что любое замощение $T$ можно превратить в кирпичную кладку за $r(T)$ флипов, причем за меньшее количество флипов это сделать невозможно.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 4 (планиметрия).*** Дана система уравнений, описывающая положение и ориентацию исполнительного механизма робота на плоскости вида

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi_1 + \mathrm{b}\cos(\varphi_1+\varphi_2) + c\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3) \\ y = a\sin\varphi_1 + \mathrm{b}\sin(\varphi_1+\varphi_2) + c\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3) \\ \gamma = \varphi_1+\varphi_2+\varphi_3 \end{cases}$$

Найдите конфигурацию ($\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$) для заданного положения и ориентации ($x$, $y$, $\gamma$), а также известных $a$, $b$, $c$. При каких $a$, $b$, $c$ задача имеет решение?

*(А.С. Климчик)*

## РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ 2020–2021 УЧЕБНОГО ГОДА

### Задания 1-го отборочного тура

**7–9 класс**

***Задача 1.*** Угловая скорость минутной стрелки – 6 °/мин, часовой – 0.5°/мин. Значит, по прошествии $t$ минут минутная стрелка опередит часовую на $5.5 \cdot t$ градусов. Когда стрелки в 5-й раз образуют угол 22.5° , минутная стрелка будет опережать часовую на $2\cdot360+22.5 = 742.5 = 5.5\cdot t$ градусов, откуда $t = 135$ минут.

***Задача 2.*** Отметим на отрезке $AB$ точку $K$ так, чтобы $BK = BC$. Тогда $AK = LC = KL$. Значит, $\angle BCA = \angle BKL = 2\cdot\angle BAC$. Осталось найти искомый угол: $\angle BAC = (180^\circ-120^\circ)/3 = 20^\circ$.

***Задача 3.*** Заметим, что если $R(n) = \overline{xy}$, где $x$ и $y$ — трехзначные числа, то $R(n) = 100x + y - x = 99x + y$. Значит, $y$ должно делиться на 9. Чисел $x$ ровно 900 (на первом месте – 9 цифр, на втором и третьем – по 10), а трехзначных чисел, кратных 9, ровно [999/9] + 1 = 112. Итого 900 · 112 = 110800.

***Задача 4.*** Изобразим задачу в виде ориентированного графа, направив ребро от сюзерена к его вассалу. Тогда у нас получится набор деревьев. В этих деревьях суммарно 33 вершины, значит, в них не более 32 ребер. Поэтому исходящих стрелок будет не более [32/4] = 8. Значит, баронов не больше 8. Пример с 8 баронами строится подвешиванием графа за вершину: на первом уровне 1 вершина, на втором — 4 вершины, на третьем — 16 вершин, на четвертом — 12 вершин.

***Задача 5.*** Пусть $k$ – общее число способов разбить нашу доску на доминошки, а $ki$ – количество искомых способов для -го отрезка. Подсчитаем количество плохих покрытий. Оно равно

$$\sum(k - k_i) = 112k - \sum k_i = 32k,$$

т. к. общее количество отрезков равно 112, а каждое плохое покрытие считается 32 раза (это общее количество доминошек, и каждая из них может побывать плохой). Значит, искомая сумма хороших покрытий равна $\sum k_i = 80k$, и последняя цифра равна 0.

***Задача 6.*** Для любого натурального $n$ выполнено $L(n+1) = 4 + 2 \cdot L(n)$, следовательно, $L(n) = 5 \cdot 2^n - 4$ (доказывается по индукции).
Ответ: $15 \cdot 2^{2019}$

## 10 класс

***Задача 1.*** Обозначим за $p(n)$ число вхождений слова $ab$ в слово $w_n$, тогда $p(0) = p(1) = 0$, $p(2) = 1$, ... Начиная с $n = 1$ любое слово $w_n$ оканчивается на символ $b$, значит, $p(n+1) = p(n) + p(n-1)$ для любого натурального $n$. Таким образом, $p(n+1) = f_n$ ($n$–е число Фибоначчи), и требуемое в условии количество равно 23-му числу Фибоначчи.
Ответ: 28567.

***Задача 2.*** Пусть в $\triangle ABC$ $AB = 10$, $BC = 7$, $AC = 8$, $CD$ – высота, $CE$ – биссектриса. Требуется найти $\frac{S_{\triangle \mathrm{CDE}}}{S_{\triangle \mathrm{ABC}}} = \frac{\frac{1}{2}CD \cdot DE}{\frac{1}{2}CD \cdot AB} = \frac{DE}{AB}$ Согласно свойству биссектрисы, $\frac{BE}{AE} = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{8}$, $BE + AE = AB = 10$, откуда $BE = \frac{14}{3}$ После применения теоремы Пифагора к $\triangle BCD$ и $\triangle ACD$ имеем $(AB - BD)^2 - BD^2 = AC^2 - BC^2$, откуда $BD = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB} = \frac{17}{4}$. Из этого находим $DE = \frac{5}{12}$ и искомое отношение $\frac{5}{120} \approx 0.04$.

***Задача 3.*** Пусть $n = \sqrt[3]{2+\sqrt{a}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{a}}$. Тогда $n^3 = 4 + 3n\sqrt[3]{4-a}$, откуда $\sqrt[3]{4-a} = \frac{n^3-4}{3n}$ и $a = 4 - (\frac{n^3-4}{3n})^3$. При $n \geq 3$ имеем $n(n^2-6) \geq 3 \cdot 3 > 4$, откуда $a \leq 4 - 2^3 < 0$, что невозможно. Значит, $n = 1$ или 2. В первом случае $a = 5$, а во втором - $a = \frac{100}{27} \approx 3.70$.

***Задача 4.*** Всего троек $C_{19}^3$. Будем считать минимум понятных троек. Для этого посмотрим на команду $k$. Если она победила $a_k$ команд, то она участвовала в $C_{a_k}^2$ понятных тройках. Значит, общее количество понятных троек равно $C_{a_1}^2 + \dots + C_{a_{19}}^2$, при этом $a_1 + \ldots + a_{19} = C_{19}^2$. Теперь осталось оценить сумму квадратов в «цешках» по неравенству о средних. В итоге минимум достигается, когда $a_1 = \ldots = a_{19} = C_{19}^2/19 = 9$. Значит, ответ — это число $C_{19}^3 - 19 \cdot C_9^2 = 285$.

***Задача 5.*** Алгоритм построения середины отрезка: с помощью циркуля построим две окружности с центрами в концах отрезка и радиусом, равным длине отрезка. Точки пересечения этих окружностей соединим отрезком, точка пересечения которого с исходным отрезком является искомой. Опишем алгоритм построения биссектрисы произвольного угла: с помощью циркуля построим точки пересечения со сторонами этого угла произвольной окружности с центром в вершине угла. Соединим две полученные точки отрезком, построим его середину согласно алгоритму, описанному ранее. Луч с началом в вершине исходного угла и проходящий через построенную точку является искомой биссектрисой. Алгоритм построения угла, равного заданному: проведем окружность произвольного радиуса (обозначим его за $x$) – она пересечет стороны угла в двух точках. На луче, от которого надо отложить равный угол, отметим точку и проведем окружность того же радиуса, что и ранее. Построим новую окружность радиуса $x$ с центром в точке пересечения прежней окружности с лучом. Проведем луч от отмеченной ранее точки и проходящий через точку пересечения двух построенных окружностей. Теперь перейдем к решению задачи. Построим угол, смежный заданному, продлив одну из его сторон за вершину. Полученный угол разделим на 5+11 = 16 = $2^4$ равных частей (сначала строим биссектрису, потом биссектрисы полученных углов, потом биссектрисы четвертей исходного угла и, наконец, биссектрисы углов, полученных на предыдущем шаге). Отложим от вершины этого угла отрезок, равный заданной стороне треугольника – получим вершину его второго угла. в этой вершине построим угол, равный $5\alpha$, где $\alpha$ – один из 16 равных углов, построенных ранее. Точка пересечения сторон полученного и заданного углов – третья вершина требуемого треугольника.

***Задача 6.*** Очевидно, уравнение имеет тривиальное решение (0, 0, 0). Докажем, что других решений в рациональных числах нет. Пусть найдется нетривиальная тройка $(x, y, z)$ рациональных чисел, удовлетворяющая

уравнению. Без ограничения общности можно считать ее целой, т.к. всегда можно домножить обе части равенства на НОК($x$, $y$, $z$) и получить целое решение.
Тогда $x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = -z\sqrt{5}$. Возведя обе части этого равенства в квадрат, получим $a + b\sqrt{6} = c$, где $a = 2x^2 + 3y^2$, $b = 2xy$, $c = 5z^2$. Поскольку $x$, $y$, $z$ – целые, имеем $b = c - a = 0$ ввиду иррациональности $\sqrt{6}$. Из $b = 0$ следует, что либо $x = 0$, либо $y = 0$ – эти случаи разбираются аналогично друг другу, поэтому для краткости положим $x = 0$. Уравнение
$c - a = 0$ примет вид $5z^2 = 3y^2$ при ненулевых (по нашему предположению) $y$ и $z$. Значит, $(\frac{y}{z})^2 = \frac{5}{3}$, что невозможно ввиду иррациональности $\sqrt{\frac{5}{3}}$. Таким образом, наше предположение было неверно, и исходное уравнение не имеет нетривиальных решений.

## 11 класс

***Задача 1.*** Заметим, что $2^{13} - 2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, поэтому искомый НОД является делителем этого числа. Также наш НОД не делится на 9, т.к. на 9 не делится число $3^{13} - 3$, поэтому НОД не больше $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Но на каждое из этих простых чисел число $n^{13} - n$ делится по малой теореме Ферма. Значит, это и есть искомый НОД: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2730$.

***Задача 2.*** Общий член арифметической прогрессии задается формулой $x_n = x_0 + d \cdot n$, откуда $x_0 = 6 - 7d$. Далее $x_5 \cdot x_{11} = (6-2d)(6+4d) = 36+12d-8d^2$ . Эта квадратичная функция принимает максимальное значение (вершина параболы) при $d = 3/4 = 0.75$.

***Задача 3.*** Заметим, что $3(x + y)(y + z)(z + x) = (x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 24$, откуда $(x + y)(y + z)(z + x) = 8$.
Т.к. $x \leq 1 \leq z$, то $z + y = 3 - x \geq 2$.
Если $z + y = 2$, то $x = 1$ и $z = y = 1$.
Если $z + y = 4$, то $x = -1$ и $(z - 1)(y - 1) = 2$. Получаем, что $z$ и $y$ разной четности – противоречие.
Если $z + y = 8$, то $x = -5$ и $(z - 5)(y - 5) = 1$, откуда $z = y = 4$.
**Ответ:** 2.

***Задача 4.*** Вычислим вес отрезка $[1, 2^k]$ для произвольного натурального $k > 1$ (при $k = 0$ это 1, при $k = 1$ это 4). Очевидно, что количество чисел с показателем 0 в этом диапазоне равно $2^{k-1}$ , с показателем 1 это будут в точности те из четных, что не делятся хотя бы на вторую степень двойки – таких ровно $2^{k-2}$ . Тех, что делятся на вторую степень, соответственно, $2^{k-3}$ и т.д. вплоть до тех, которые делятся ровно на $k-1$-ю и на -ю степень числа 2. Тех и других – ровно одно число.

Таким образом, вес отрезка равен $S_k = 2^{k-1}p(0) + 2^{k-2}p(1) + \ldots + 2^0p(k-1) + 2^0p(k)$, где $p(i)$ – это вес числа с показателем двойки $i$. То есть $S_k = 2^{k-1}(0^2 + 0 + 1) + 2^{k-2}(1^2 + 1 + 1) + 2^{k-3}(2^2 + 2 + 1) + \ldots + 2^0((k-1)^2 + (k-1) + 1) + 2^0(k^2 + k + 1)$. Для упрощения этой формулы применим равенство $i^2+i = 2i(i+1)/2 = 2(1+2+3+\ldots+i)$. Тогда $S_k = 2^{k-1}(2\cdot 0+1)+2^{k-2}(2\cdot 1+1)+2^{k-3}(2\cdot(1+2)+1)+\ldots+2^0(2(1+2+\ldots+(k-1))+1)+2^0(k^2+k+1)$. Эти суммы можно перегруппировать, вынеся общие множители вида $2i$ (а также отделив неформатный член $2^0(k^2 + k + 1)$ и по единице из каждой скобки): $= [1 \cdot 2 \cdot (2^{k-2} + 2^{k-3} + \ldots + 1) + 2 \cdot 2 \cdot (2^{k-3} + \ldots + 1) + \ldots + (k-1) \cdot 2 \cdot 1] + (k^2 + k + 1) + (2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2^0) = 2[(2^{k-1} - 1) + 2(2^{k-2} - 1) + 3(2^{k-3} - 1) + \ldots + (k-1)(2^1 - 1) + k(2^0 - 1)] + (k^2 + k + 1) + (2^k - 1)$. Выражение в квадратных скобках равно: $2^{k-1} + 2 \cdot 2^{k-2} + \ldots + k2^0 - (1 + 2 + \ldots + k) = ((2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 1) + (2^{k-2} + 2^{k-3} + \ldots + 1) + \ldots + 2^0) - k(k+1)/2 = (2^k - 1) + (2^{k-1} - 1) + \ldots + (2^1 - 1) + (2^0 - 1) - k(k+1)/2 = (2^{k+1} - 1) - (k+1) - k(k+1)/2$.

Подставляя обратно и приводя подобные, имеем: $S_k = 5 \cdot 2^k - 2k - 4$. Тогда, если натуральное $n$ записывается как $2^{d1} + 2^{d2} + \ldots + 2^{dt}$ для набора уменьшающихся показателей $d_1 > d_2 > \ldots > d_t$, то легко проверить, что вес отрезка $[1, n]$ равен сумме весов $S_{d1} + S_{d2} + \ldots + S_{dt}$. Кроме того, отметим, что $S_k$, то есть вес отрезка $[1, 2_k]$ несколько меньше, чем $5 \cdot 2_k$. Тогда далее легко вычислить, что вес отрезка [1, 211], исходя из разложения 211 = 128 + 64 + 16 + 2 + 1, меньше 1000, а вес отрезка [1, 212] - больше.
Ответ: 212

***Задача 5.*** Очевидно, уравнение имеет тривиальное решение (0, 0, 0). Докажем, что других решений в рациональных числах нет.
Пусть найдется нетривиальная тройка $(x, y, z)$ рациональных чисел, удовлетворяющая уравнению. Без ограничения общности можно считать ее целой, т.к. всегда можно домножить обе части равенства на НОК$(x, y, z)$ и получить целое решение.
Тогда $x\sqrt{3} = z - y\sqrt{11}$. Возведя обе части этого равенства в квадрат, получим $a\sqrt{11} = b$, где $a = 2zy$, $b = z^2 + 11y^2 - 3x^2$ –целые числа. Поскольку $x, y, z$ – целые, имеем $a = b = 0$ ввиду иррациональности $\sqrt{11}$. Из $a = 0$ следует, что либо $z = 0$, либо $y = 0$. Если $y = 0$, то $(\frac{z}{x})^2 = 3$, что невозможно ввиду иррациональности $\sqrt{3}$. Если $z = 0$, то из $b = 0$ следует $(\frac{x}{y})^2 = -\frac{11}{3}$, что также невозможно из-за иррациональности $\sqrt{\frac{11}{3}}$.
Таким образом, наше предположение было неверно, и исходное уравнение не имеет нетривиальных решений.

***Задача 6.*** 1. Сперва построим параллелепипед П, в который данный тетраэдр $ABCD$ будет вписан. Для этого через каждое ребро тетраэдра проведем плоскость – биссектор внешнего двугранного угла. Докажем, что плоскости, проведенные через скрещивающиеся ребра данного тетраэдра, параллельны. Рассмотрим пару плоскостей, проведенных через ребра $AB$ и $CD$. В плоскости $\triangle ABC$ отметим точку $C\,'$ (в той же полуплоскости относительно прямой $AB$, что и $C$) так, что $\triangle ABC = \triangle ABC'$. Аналогично строится точка $D'$ в плоскости $\triangle ABD$. Тогда легко видеть, что $\triangle ABC = \triangle ABD'$, $\triangle ABC' = \triangle ABD$. Тогда эти пары треугольников симметричны относительно внутреннего биссектора двугранного угла при ребре $AB$ данного тетраэдра. В частности, точки $C$ и $D'$ симметричны, как и точки $C\,'$ и $D$. Но тогда отрезки $CD$ и $DC'$ перпендикулярны этому биссектору и параллельны между собой. Значит, они параллельны биссектору $\alpha$ внешнего двугранного угла при ребре $AB$. Остается добавить, что отрезки $CC'$ и $DD'$ параллельны $AB$ и друг другу. Таким образом, $CC'DD'$ – параллелограмм, плоскость которого параллельна $\alpha$. Значит, через ребро $CD$, являющееся диагональю этого параллелограмма, проходит плоскость, параллельная $\alpha$, проходящей через скрещивающееся ребро $AB$. Очевидно, что аналогичная процедура, начинающаяся с биссектора $\beta$ внешнего двугранного угла $CD$ приводит к аналогичному результату: ребро $AB$ оказывается принадлежащим плоскости, параллельной $\beta$, содержащей скрещивающееся ребро тетраэдра. Однако, существует единственная пара параллельных ребер, содержащих скрещивающиеся ребра произвольного тетраэдра. Значит, построенные две пары параллельных плоскостей совпадают, и биссекторы $\alpha$ и $\beta$ параллельны. Таким образом, построенные 6 биссекторов образуют параллелепипед П.

2. Докажем, что центры вписанной и описанной сфер этого тетраэдра совпадают. Пусть $O$ – центр описанной сферы, тогда проекция этой точки на плоскость каждой грани является центром описанной окружности этой грани. Тогда, согласно теореме Пифагора, радиус описанной сферы и радиус описанной окружности $\triangle BCD$ (ее центр – точка $O_A$) удовлетворяют условию $R^2 = OO^2_A + R^2_A$. Так как все грани тетраэдра равны, радиусы их описанных окружностей также равны – значит, длины всех перпендикуляров из $O$ на плоскости граней тетраэдра ($OO_A$, $OO_B$, ...) равны между собой. Но тогда $O$ является центром сферы, касающейся всех граней тетраэдра, т. е. вписанной в него.

3. Докажем, что перпендикуляры, построенные к граням параллелепипеда П через центры этих граней, содержат центр описанной сферы $O$. Рассмотрим плоскость $\alpha$, содержащую ребро $AB$: центр вписанной сферы принадлежит биссектору внутреннего двугранного угла при $AB$, т. е. принадлежит плоскости, перпендикулярной $\alpha$ и содержащей $AB$. Кроме того, $OA = OB$. Тогда перпендикуляр $l_{AB}$, проведенный через центр грани параллелепипеда, соответствующей ребру $AB$, проходит через середину диагонали этой грани, т. е. через середину $AB$. Но этот перпендикуляр содержится в плоскости $ABO$ и является в ней срединным перпендикуляром к отрезку $AB$. Значит, $l_{AB}$ содержит точку $O$. Аналогично, ее содержат перпендикуляры к другим граням параллелепипеда, построенные на их серединах.

В частности, это означает, что $l_{AB}$ и $l_{CD}$ параллельны друг другу и проходят через общую точку $O$, т. е. они совпадают. Значит, соответствующие грани параллелепипеда совмещаются параллельным переносом на вектор, лежащий на этой прямой. Значит, боковые ребра параллелепипеда перпендикулярны основаниям, т. е. П - прямоугольный параллелепипед.

4. Отрезки $a$, $b$ и $c$ – длины различных диагоналей граней П. Тогда, согласно теореме Пифагора, $a^2 + b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2)$. Радиус описанной сферы равен $(x^2+y^2+z^2)/4 = 1$. Значит, $a^2 + b^2 + c^2 = 8$.

## Задания 2-го отборочного тура

### 7–9 класс

***Задача 1.*** Докажем, что $b - a \geq 2$:

$\frac{205}{206} < \frac{a}{b} < \frac{206}{207}, \frac{207}{206} < \frac{b}{a} < \frac{206}{205}$. Вычитая 1, получим $\frac{1}{206} < \frac{b-a}{a} < \frac{1}{205}$.

Учитывая, что $b > a$, т. е. $b \geq a + 1$, предположим, что $b = a + 1$. Тогда $205 < a < 206$, что невозможно для натурального $a$. Значит, $b > a + 1$, т. е. $b - a \geq 2$. Тогда $a \geq 2 \cdot 205 + 1 = 411$ и $b \geq 413$. Легко убедиться, что пара $a = 411, b = 413$ удовлетворяет условию задачи. Согласно доказанному выше, эта пара даст минимальную сумму $a + b = 824$.

***Задача 2.*** Всего было роздано $9 \cdot (1 + 2 + 3) = 54$ балла. Значит, победитель набрал не менее 19 баллов, а проигравший — не более 17 баллов. Если победитель набрал не более одной тройки, то проигравший набрал не менее 5 троек. Тогда проигравший заведомо набрал не менее $5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 19$ баллов — противоречие. Значит, победитель получил хотя бы 2 тройки. Но тогда занявший второй место получил хотя бы 3 тройки, а проигравший получил хотя бы 4 тройки — итого хотя бы 9 оценок. Но троек ровно 9, значит, победитель получил ровно 2 тройки, а проигравший — ровно 4 тройки. Тогда проигравший набрал хотя бы $4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 17$ баллов. Но, с другой стороны, больше он набрать не мог. Значит, проигравший набрал 17 баллов. Тогда занявший второе место не мог набрать больше 18 баллов, иначе $17 + 19 + 20 > 54$. Поэтому занявший второе место набрал 18 баллов, а победитель — 19 баллов. Если победитель набрал $x$ двоек, то он набрал $7 - x$ единиц, откуда $(7 - x) \cdot 1 + x \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 19$. решая это уравнение, находим $x = 6$.

***Задача 3.*** Для удобства решения задачи опусти высоты из точки $D$ на стороны $AB$ и $CB$ и введем дополнительные следующие обозначения: пусть $x$ – длина стороны $AB$, а $h_x$ – высота, опущенная на эту сторону; $y$ – длина стороны $CB$, а $h_y$ – высота, опущенная на эту сторону; $b$ – длина отрезка $BD$; $m = 1/2$, $n = 1/5$. Имеем: $S_{ABD} = x \cdot h_x/2 = m \cdot S_{ABC} = m \cdot xy/2$; следовательно, $h_x = m \cdot y$; $S_{CBD} = y \cdot h_y/2 = n \cdot S_{ABC} = n \cdot xy/2$; следовательно, $h_y = n \cdot x$.

Далее имеем: $a^2 = (x - h_y)^2 + h_x^2 = (1 - n)^2x^2 + m^2y^2$, $c^2 = h_y^2 + (y - h_x)^2 = n^2x^2 + (1 - m)^2y^2$.

Отсюда (так как $m^2n^2 - (1-m)^2(1-n)^2 \neq 0$):
$x^2 = \frac{m^2c^2-(1-m)^2a^2}{m^2n^2-(1-m)^2(1-n)^2}$; $y^2 = \frac{n^2a^2-(1-n)^2c^2}{m^2n^2-(1-m)^2(1-n)^2}$.
Поэтому $b^2 = h_x^2 + h_y^2 = m^2y^2 + n^2x^2 = m^2\frac{n^2a^2-(1-n)^2c^2}{m^2n^2-(1-m)^2(1-n)^2} + n^2\frac{m^2c^2-(1-m)^2a^2}{m^2n^2-(1-m)^2(1-n)^2}$.

***Задача 4.*** Докажем, что $k = 1233$. Будем вести доказательство по индукции по количеству $n$ целых чисел в ряду. При $n = 2$ утверждение $k = n - 1$ очевидно. Для произвольного $n > 2$ рассмотрим два числа, которые стоят по краям отрезка. Если одно из них делится на 3, то будем рассматривать отрезок без этого числа и применим предположение индукции. В противном случае либо у этих чисел разные ненулевые остатки по модулю 3, либо одинаковые. Если остатки одинаковые, то попросим поменять одно из этих чисел. Тогда оно либо станет делиться на 3, либо будет иметь другой ненулевой остаток, что сводит нашу задач к случаю разных остатков на концах отрезка. Но тогда, попросив поменять числа во всем отрезке, мы получим, что одно из чисел на конце отрезка станет делиться на 3.

***Задача 5.*** Решим задачу для произвольного $(2m + 1)$-угольника. Здесь $m$ – заданное натуральное число (в данной задаче оно равно 5). Пусть длина стороны $A_kA_{k+1}$ (для $1 \le k \le 2m$) равна $a_k$, длина стороны $A_{2m+1}A_1$ равна $a_{2m+1}$, а $x$ – длина $A_1X_0$. Тогда
$|A_2X_1| = (a_1 - x)$, $|A_3X_2| = (a_2 - (a_1 - x)) = (a_2 - a_1 + x)$,
$|A_4X_3| = (a_3 - (a_2 - a_1 + x)) = (a_3 - a_2 + a_1 - x)$, ...
$|A_{2k+1}X_{2k}| = (\Sigma\, a_{2i} - \Sigma\, a_{2i-1} + x)$, $|A_{2(k+1)}X_{2k+1}| = (\Sigma\, a_{2i+1} - \Sigma\, a_{2i} - x)$, ...
$|A_{2m+1}X_{2m}| = (\Sigma\, a_{2i} - \Sigma\, a_{2i-1} + x)$, $|A_0X_{2m+1}| = (\Sigma\, a_{2i+1} - \Sigma\, a_{2i} - x)$ для $1 \le k \le m$.
Если точка $X_{2m+1}$ совпадает с $X_0$, тогда все точки, начиная с этого места, будут повторяться. Если точки $X_{2m+1}$ и $X_0$ не совпадают, то процесс совпадения точек начинается не с $X_0$, а с $X_{2m+1}$ и с расстояния не $x$, а $(\Sigma\, a_{2i+1} - \Sigma\, a_{2i} - x)$. Поэтому после второго прохода того же цикла для точки $X_{2(2m+1)}$ имеем $|A_0X_{2(2m+1)}| = (\Sigma\, a_{2i+1} - \Sigma\, a_{2i} - |A_0X_{2m+1}|) = (\Sigma\, a_{2i+1} - \Sigma\, a_{2i} - (\Sigma\, a_{2i+1} - \Sigma\, a_{2i} - x)) = x$, то есть точка $X_{2(2m+1)}$ совпадает с $X_0$ и в последовательности $X_0, X_1, X_2, \ldots$ – не более $2(2m + 1)$ различных точек. Для реализации сценария с этим количеством точек используем правильный $(2m + 1)$-угольник со стороной, равной $3x$.

***Задача 6.*** Заметим, что
$2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2.$
Рассмотрим величину $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$. Она равна $2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) = 2.$
Если все разности $a = |x - y|$, $b = |y - z|$ и $c = |z - x|$ меньше 1, то $2 = a^2 + b^2 + c^2 < a + b + c$. Но из трех разностей одна равна сумме двух других, например, $a = b + c$. Тогда получаем, что $a > 1$ – противоречие.

**10 класс**

***Задача 1.*** В полдень часовая и минутная стрелки механических часов с круглым циферблатом совпадают, то есть угол между ними равен 0°. Сколько минут с 12:00 до 13:00 того же дня угол между минутной и часовой стрелкой составит не больше 59° (каждая стрелка движется с постоянной угловой скоростью, а углом между стрелками считается меньший из двух образуемых ими углов)?

***Задача 2.*** Уравнение $y \cdot x^2 + k \cdot x + (y + k) = 0$ имеет действительные корни тогда и только тогда, когда $D = k^2 - 4y(y+k) = -4y^2 - 4ky + k^2 \geq 0$, то есть, когда выполнятся неравенство $4y^2 + 4ky - k^2 \leq 0$.
Это неравенство выполнено тогда и только тогда, когда значение $y$ лежит между корнями уравнения $4y^2 + 4ky - k^2 = 0$, то есть когда $\frac{-1-\sqrt{2}}{2} \cdot k \leq y \leq \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \cdot k$. Кроме того, нам нужно найти только неотрицательные значения $y$. Поэтому $0 \leq y \leq \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \cdot k$. Так как $\sqrt{2} < 1.42$ и $k \leq 12$, возможные значения $y$ – это 0, 1 или 2, а их сумма равна 3.

***Задача 3.*** Сначала докажем, что точка $Q$ – это центр $R$ окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$. Имеем: $\angle ARC = 60°$ как центральный угол, соответствующий вписанному углу $\angle ABC = 30°$; из рассмотрения $\triangle ACD$ следует $\angle ADC = 120°$. Так как сумма противолежащих углов $\angle ARC + \angle ADC = 180°$, то вокруг четырехугольника $ARCD$ можно описать окружность. Так как в этой окружности хорды $AR$ и $CR$ имеют равную длину, равную радиусу окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$, то равны и стягиваемые ими дуги, то есть $\angle ADR = \angle CDR$, $DR$ – биссектриса угла $ADC$, а точка $Q$ – это центр $R$ окружности, описанной вокруг треугольника $ABC$. Пусть $r$ – радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$. Имеем: $AC/2 = r \cdot \sin(30°)$, то есть $r = AC$. Отсюда $PQ = \sqrt{AC^2 - (AB/2)^2}$.

***Задача 4.*** См. решение задачи №4 для 7–9 классов.
***Задача 5.*** См. решение задачи №5 для 7–9 классов.
***Задача 6.*** Докажем индукцией по $n \geq 0$, что последовательность, описанная в условии задачи, совпадает с последовательностью, заданной формулой общего члена $y_n = 16^{(1-(-4)^{-n})/5}$ для всех $n \geq 0$.
База индукции: пусть $n = 0$. Имеем $x_0 = 1$ и $y_0 = 16^{(1-(-4)^{-0})/5} = 16^0 = 1 = x_0$.
Индукционная гипотеза: пусть для некоторого $n \geq 0$ выполнено $x_n = y_n$.
Шаг индукции: докажем, что $x_{n+1} = y_{n+1}$. Имеем $x_{n+1} = (16/x_n)^{1/4} = (16/y_n)^{1/4} = (16/16^{(1-(-4)^{-n})/5})^{1/4} = 16^{(1-(-4)^{-(n+1)})/5}$.
Следовательно, $x_{n+1} = y_{n+1}$, что доказывает шаг индукции и завершает

доказательство совпадения последовательностей $x_n$ и $y_n$ для всех $n \geq 0$. Теперь докажем, что для некоторого $n_0$ и всех $n \geq n_0$ выполнено $y_n \leq 2$. Для этого надо показать, что для всех этих $n$ верно $\frac{1-(-4)^{-(n+1)}}{5} \leq \frac{1}{4}$. Это неравенство для $n \geq 1$ следует из $1 - (-4)^n \leq \frac{5}{4}$.

## 11 класс

***Задача 1.*** Будем считать, что после заполнения бумаги обоими участниками, предприниматель сразу забирает причитающиеся по бумаге посылки со склада. То есть, если посылка могла быть выдана предпринимателю по предыдущей бумаге, то к моменту заполнения следующей бумаги мы считаем, что посылка уже получена. Очевидно, что, подавая бумаги охране ровно в том порядке, в котором они были получены, предприниматель сможет и позже повторить ровно такую же последовательность забора посылок. Чтобы справиться не более чем за 12 вопросов, предпринимателю следует делать так: при выписывании очередной бумаги начальником склада, предприниматель проверяет, чего больше – посылок, включенных в бумагу, или не включенных в нее (с учетом того, что по предыдущим бумагам часть посылок уже выдана). В зависимости от этого он выбирает тот вариант, при котором заберет больше посылок. Таким образом, с каждой бумагой он будет забирать не менее половины от имеющихся на складе посылок. Значит, после выписывания 12 бумаг на складе останется не более $3000/2^{12} = 3000/4096$ посылок, что меньше 1. Таким образом, на складе не останется посылок. С другой стороны, начальник склада может каждый раз писать ровно половину (с точностью до округления до целого) оставшихся посылок и тем самым гарантировать, что после выписывания -й бумаги на складе останется не менее $\lfloor 3000/2^k \rfloor$ посылок, т. е. 11 бумаг может не хватить.

***Задача 2.*** Обозначим многочлен (выражение) $y \cdot x^y + kx^k - 2020$ через $P(x)$. Нам надо найти число корней этого многочлена. Заметим, что по условию задачи $y + k = 2020$. Необходимо рассмотреть два случая: когда $y$ – четный и когда он нечетный.

Сначала рассмотрим случай, когда $y$ – четное число. Так как $P(-\infty) = +\infty$, $P(+\infty) = +\infty$ и $P(0) = -2020 < 0$, то уравнение имеет как минимум 2 корня. Заметим, что корень уравнения обязательно разделяет две экстремальные точки графика непрерывной функции. Поэтому давайте найдем вещественные точки, в которых $P(x)$ может иметь экстремум. Для этого найдем производную $P'(x) = y^2x^{y-1} + k^2x^{k-1} = x^{k-1}\,(y^2x^{y-k} + k^2)$ и найдем ее корни (как кандидаты на экстремальные точки $P(x)$): $P'(x) = 0$ только при $x = 0$ (так как выражение $y^2x^{y-k} + k^2$ всегда положительно). Следовательно, между $-\infty$ и $+\infty$ только одна экстремальная точка, а следовательно, если $y$ – четное число, то уравнение $y \cdot x^y + kx^k = 2020$ имеет ровно два вещественных корня.

Теперь рассмотрим случай, когда $y$ – нечетное число. Так как $P(-\infty) = -\infty$, $P(+\infty) = +\infty$, то уравнение имеет как минимум 1 корень. Исследуем график функции $P(x)$. Для этого найдем производную $P'(x) = y^2x^{y-1} + k^2x^{k-1} = x^{k-1}(y^2x^{y-k} + k^2)$. Так как $y + k = 2020$ и $y > k$, то $(y - k) > 0$ – четное число, $k$ – нечетное число, а $(k-1)$ – четное число. Поэтому $P'(x) = x^{k-1}(y^2x^{y-k}+k^2) \geq 0$ на всей числовой прямой, и следовательно, между $-\infty$ и $+\infty$ функция $P(x)$ не убывает, а уравнение $yx^y + kx^k = 2020$ имеет только один вещественный корень.

***Задача 3.*** Согласно решению задачи №3 для 10 класса, биссектриса $\angle ADP$ и серединный перпендикуляр к стороне $AB$ пересекаются в центре $R$ окружности, описанной вокруг $\triangle ABP$; биссектриса угла $BCP$ и серединный перпендикуляр к стороне $AB$ пересекаются в центре $R$ окружности, описанной вокруг треугольника $ABP$.

Следовательно, биссектрисы углов $ADP$ и $BCP$ пересекаются в точке $R$. Согласно решению задачи №3 для 10 класса, расстояние от $AB$ до точки пересечения биссектрис углов $ADP$ и $BCP$ равно $\frac{\sqrt{AP^2-AB^2\sin\angle PBA}}{2\sin\angle PBA}$.

***Задача 4.*** Запишем многочлен $P(x)$ в виде $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$. Заметим, что $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1) = P(i)P(-i) = |P(i)|^2 = |(1 - 6 + 1)^2 + i(c - a)|^2 = 16 + (c - a)^2 > 16$, и равенство достигается при $P(x) = (x - 1)^4$.

***Задача 5.*** Пусть последовательность $X_0, X_1, X_2,\ldots$, построенная по описанным правилам, существует. Аналогично задаче №5 для 7-9 классов, получим $|A_0X_{2m}| = (\Sigma\, a_{2i} - \Sigma\, a_{2i-1} + x)$, $|A_0X_{4m}| = (\Sigma\, a_{2i} - \Sigma\, a_{2i-1} + |A_0X_{2m}|) = (2(\Sigma\, a_{2i} - \Sigma\, a_{2i-1}) + x), \ldots |A_0X_{km}| = (k(\Sigma\, a_{2i} - \Sigma\, a_{2i-1}) + x)$ при $k \geq 0, \ldots$ Поскольку $\Sigma\, a_{2i} \neq \Sigma\, a_{2i-1}$, имеем $|k(\Sigma\, a_{2i} - \Sigma\, a_{2i-1}) + x| > |A_0A_{2m}|$ для $k \geq 0$, то есть точка $X_{km}$ лежит вне стороны $A_0A_{2m}$ – противоречие с предположением, что все точки последовательности лежат на сторонах многоугольника. Таким образом, описанной последовательности $X_0, X_1, X_2,\ldots$ не существует.

***Задача 6.*** Изобразим данные в условии задачи в виде ориентированного графа, вершины которого - пары натуральных чисел $(i, b_i)$ для всех натуральных $1 \leq i \leq 10$, в которых $i$ – номер ученика, а $b_i$ – число, написанное на его карточке. Ребра графа будут соединять пары вида $(x, y)$ и $(y, z)$, направим их от пары $(x, y)$ к паре $(y, z)$. Очевидно, степень каждой вершины равна 2, поскольку ровно одно ребро из нее выходит и одно ребро – входит (исключения - вершины с т. н. петлями, которые соответствуют ученикам, чей номер совпадает с числом, написанным на их же карточке – в худшем случае таких вершин не будет вовсе). Построенный граф распадается на циклы.

Докажем, что даже в худшем случае (когда в графе нет петель и цикл всего один) мы можем путем обмена карточками (причем не более одного раза в пределах любой пары учеников) добиться совпадения номеров каждого

ученика с числом на его карточке.
Выберем один из циклов: пусть он содержит $k$ учеников с номерами $i_1,...i_k$, расположенными в цикле последовательно, начиная с произвольно выбранного $i_1$. Теперь будем совершать обмены карточками в "обратном" порядке: -й с $i_{k-1}$-м, потом $i_{k-1}$-й с $i_{k-2}$-м, затем $i_{k-2}$-й с $i_{k-3}$-м, ..., $i_2$-го с $i_1$-м и, наконец, $i_1$-го ученика с $i_k$-м. Теперь внутри этого цикла каждый ученик имеет на руках карточку с соответствующим ему номером. Повторяя процедуру для остальных циклов, добьемся желаемого результата – все ученики будут с соответствующими их номерам карточками.

## Задания финального тура

### 7–9 класс

***Задача 1.*** Представим $n$ в виде

$$1 + 10^{10} + 10^{20} + \cdots + 10^{100} = \sum_{k=0}^{10} 10^{10k}$$

$$n^2 = (\sum_{k=0}^{10} 10^{10k})^2 = \sum_{k=0}^{10} 10^{20k} + \sum\nolimits_{0 \le i.j \le 10} 10^{10(i+j)}$$

В разрядах, номера которых не кратны 10, будут стоять нули (за исключением, возможно, некоторых, в которых будут стоять единицы, что мы и увидим далее). Очевидно, в нулевом разряде числа $n^2$ будет стоять единица. Слагаемые, соответствующие $i > 1$, никак не повлияют на цифру, стоящую в 10-м разряде. Аналогично, слагаемые, соответствующие $i > m$ для всякого натурального $m < 10$, не повлияют на цифру, стоящую в $10m$-м разряде.
Осталось подсчитать, сколько слагаемых соответствуют всяким $i \le m$ для каждого из этих $m$. Нетрудно убедиться, что в 10-м разряде будет стоять цифра 2, в 20-м – цифра 3 и т.д. до 90-го разряда, соответствующего $m = 9$, поскольку число 9 представляется в виде суммы двух целых неотрицательных чисел ($i$ + $j$) 10 способами – значит, в 90-м разряде будет стоять ноль, а в 91-м – единица. Аналогично, в 100-м разряде будет стоять единица, как и в 101-м, потому что число 10 представимо в виде ($i + j$) 11 способами ($i$, $j$ – целые неотрицательные числа).
Осталось представить каждое из натуральных чисел от 11 до 20 в виде суммы двух целых неотрицательных чисел, не превосходящих 10. Итак, сумма цифр числа $n^2$ равна $1 + 2 + 3 + \cdot \cdot \cdot + 9 + 1 + 1 + 1 + 1 + 9 + 8 + 7 + \cdot \cdot \cdot + 2 + 1 = 2 \cdot (1 + \cdot \cdot \cdot + 9) + 4 = 94$.

***Задача 2.*** Воспользовавшись определением суммы по Борелю, найдем

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 4^n + 8^n - \cdots + (-1)^{p+1} \cdot 2^{pn})$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4^n + \cdots + (-1)^{p+1} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{pn}$$

Вычислим $S_k = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{kn} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{kn} = 1 + 2^k \sum_{n=1}^{\infty} 2^{k(n-1)} = 1 + 2^k \sum_{n=0}^{\infty} 2^{kn} = 1 + 2^k S_k$, откуда $S_k = \frac{1}{1-2^k}$ для всякого натурального $k$. Таким образом, $S_1 = -1$, $S_2 = -1/3$, $S_3 = -1/7$ и т.д.

Оценим требуемую конечную сумму $S$, представив ее в виде $S = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{p+1} S_p = S_1 + (S_3 - S_2) + (S_5 - S_4) + \cdots$ В этой сумме в каждой скобке разность положительна. Возможно, без пары останется $S_p$, тогда можно прибавить ее с соответствующим знаком к первой скобке – она по-прежнему будет положительна для любого $p > 3$. Случаи с $p \leq 3$ легко перебираются вручную. Таким образом, $S > -1$.

***Задача 3.*** Найдем вероятность того, что роботы столкнутся. Это событие (если оно случится) произойдет на прямой $x = m + 0.5$, иначе пути роботов будут различны. Вычислим вероятность того, что роботы столкнутся в точке с координатами $(m + 0.5, q)$, где $0 \leq q \leq n$ – целое число. Для этого сначала найдем вероятность $P_q$ того, что робот пройдет $m$ шагов вдоль оси $x$ и $q$ шагов вдоль оси $y$: $P_q = \frac{C_{m+q}^q}{2^{m+q}}$, если $q < n$, и $P_q = \frac{\sum_{k=n}^{m+n} C_{m+n}^k}{2^{m+n}}$ для $q = n$, поскольку робот успел выполнить $m + q$ единичных передвижений, из которых $q$ – вдоль оси $y$. Здесь $C_{m+q}^q = \frac{(m+q)!}{m!q!}$ – число сочетаний, т.е. количество способов выбрать $q$ элементов из $m + q$. Если роботы столкнулись в точке $(m + 0.5, q)$, то они оказались соответственно в точках $(m, q)$ и $(m + 1, q)$ – вероятность этого равна $P_q{}^2$. Тогда вероятность того, что роботы столкнутся в точке $(m + 0.5, q)$, равна $p_q = P_q{}^2 \cdot (1/2)^2$ (роботы выбрали встречные направления движения) для $q < n$ и равна $p_n = P_n{}^2$ для $q = n$. Вероятность того, что роботы столкнутся, равна $\sum_{q=0}^{n} p_q$. Значит, искомая вероятность равна $1 - \sum_{q=0}^{n} p_q$, где $p_q$ – вероятность, определенная ранее.

***Задача 4.*** 1) Рассмотрим два пути $\gamma_1$ и $\gamma_2$, соединяющие $v_0$ с $v$, и обозначим для любого пути $\gamma$ через $I_\gamma$ разницу количества попутных и противопутных стрелок при проходе вдоль него. Докажем, что значения функции высоты в $v$, построенные по путям $\gamma_1$ и $\gamma_2$, равны — иными словами, что $I_{\gamma 1} = I_{\gamma 2}$. Для этого рассмотрим замкнутый контур $\gamma_3$, получающийся, если мы сначала пройдем от $v_0$ к $v$ по первому пути, а потом вернемся из $v$ в $v_0$ вдоль второго, проходя его в обратном направлении. При прохождении пути в обратном направлении вклад каждой стрелки изменяет знак, поэтому $I_{\gamma 3} = I_{\gamma 1} - I_{\gamma 2}$, и мы хотим доказать, что $I_{\gamma 3} = 0$.

На самом деле, мы докажем, что для любого замкнутого пути $\gamma$ верно равенство $I_\gamma = 0$. Для этого сначала разрежем наш путь на несколько простых (т.е. несамопересекающихся) замкнутых путей (при необходимости удалив все стрелки, которые проходятся дважды в противоположных направлениях). Легко видеть, что достаточно доказать наше утверждение для несамопересекающегося контура. Без ограничения общности предположим, что наш контур $\gamma$ обходится против часовой стрелки. Рассмотрим доминошки, лежащие внутри контура, и пусть $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_n$ — замкнутые пути, отвечающие обходу их границ против часовой стрелки. Заметим, что тогда $I_\gamma = I_{\gamma'1} + \ldots + I_{\gamma'n}$. Действительно, ребра, составляющие контур $\gamma$, будут в правой части посчитаны ровно один раз, а лежащие внутри него будут посчитаны дважды с противоположными знаками и поэтому сократятся. Но на границе любой доминошки три стрелки идут по часовой, а три против часовой стрелки, поэтому все слагаемые $I_{\gamma'j}$ равны нулю, что и требовалось доказать.
2) Рассмотрим квадрат $2 \times 2$, в котором две вертикальные доминошки операцией флипа перешли в две горизонтальные. Для определенности пусть левый нижний угол у квадрата черный (случай белого углового квадрата рассматривается аналогично). Тогда легко видеть, что высоты всех точек, кроме центральной, остались неизменными, а высота центральной точки изменилась на 4. Таким образом, приведенная высота точки не меняется, если относительно этой точки флип не совершался, и изменяется на 1, если флип был совершен

**10 класс**

***Задача 1.*** Представим уравнение в виде $\sqrt{x \cdot \sqrt[4]{x \cdot 1024}} = 1024$ ввиду бесконечной вложенности радикалов.

$$x \cdot \sqrt[4]{x \cdot 2^{10}} = 2^{20}$$
$$x^{5/4} \cdot 2^{\frac{5}{2}} = 2^{20}$$
$$x = 2^{14} = 16384$$

***Задача 2.*** Пусть точка $A_0$ имеет координаты ($x_0$, $y_0$) и (без ограничения общности) $x_0 \geq y_0$. Покажем, что при помощи $n$ действий 1 и 3 можно добиться того, что $|x_n - 1| < 10^{-3}$. Для начала заметим, что, если хотя бы одна из координат точки $A$ отрицательна, то можно операциями 1 и 2 (не более двух применений) сделать обе координаты положительными.
Преобразование 1 преобразует $x_k$ в $2 - x_k$, а преобразование 2 – в $1/x_k$. Рассмотрим композицию (последовательное применение) преобразований 3 и 1 в указанном порядке: $x \mapsto 1/x \mapsto 2 - 1/x = (2x-1)/x$. Назовем указанное преобразование $f$ и покажем, что $f\left(\frac{(n+1)x-n}{nx-(n-1)}\right) = \frac{(n+2)x-(n+1)}{(n+1)x-n}$ для любого натурального $n$.
Действительно,

$$f\left(\frac{(n+1)x-n}{nx-(n-1)}\right)=2-\frac{nx-(n-1)}{(n+1)x-n}=\frac{(n+2)x-(n+1)}{(n+1)x-n}$$
$$=\frac{n+2}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2x-n(n+1)}$$

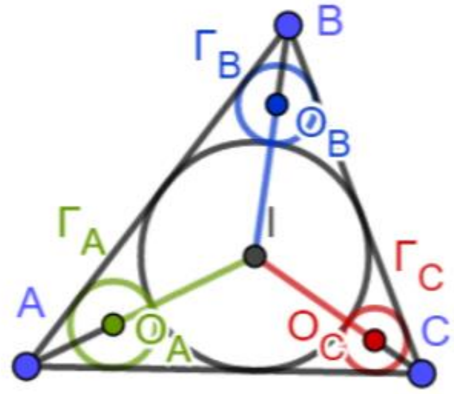
Если $0 < x < 1$, то сначала выполним преобразование 3, если $x \geq 2$, то выполним преобразование $f$. Если $x$ изначально не равен 1, то ни одно из преобразований не переведет его в 1. Таким образом, можно считать, что $1 < x < 2$. При этом $|x - 1| = |\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2x-n(n+1)}| < 10^{-3}$. Решая это неравенство, получим $n \geq 1000 - 1/(x-1)$. Поскольку $x - 1$ положительно, за 1000 операций $f$ мы гарантированно добьемся того, чтобы $|x_n - 1| < 10^{-3}$ .

Заметим, что при выполнении операции 1 значение $|y_k-1|$ не изменяется, при операции 3 ордината точки меняется аналогично абсциссе. Введем преобразование $h$ как композицию преобразований 3, 2 и 1 в указанном порядке. Очевидно, после $n$ преобразований $h$ ордината точки $A_0$ также не будет отличаться от единицы более, чем на $|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2x-n(n+1)}| < 10^{-3}$.

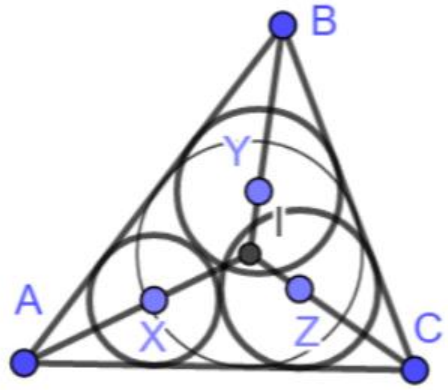
Итак, добиться выполнения требования задачи можно за не более чем 3005 операций. Из них первые две – операции 1 и 2 (чтобы добиться положительности координат), затем добиваемся того, чтобы обе координаты лежали в пределах от 1 до 2 (не более трех операций) и, наконец, 1000 применений преобразования $h$, каждое из которых включает 3 операции.

***Задача 3.*** Единственность следует из такого простого соображения. Рассмотрим те ребра, разность функций высоты на концах которых равна единице. Эти ребра будут образовывать границы доминошек нашего разбиения; напротив, те ребра, разность функций высоты на концах которых равна минус трем, будут «закрыты» доминошками. Далее, рассмотрим какую-нибудь клетку. Все стрелки на ее границе направлены в одном направлении: либо по часовой стрелке, либо против. Поскольку сумма приращений функции высоты при обходе этой клетки равна нулю, это значит, что существует ровно три ребра из четырех, для которых разность значений функции высоты на их концах равна единице, и одно ребро, для которого эта разность равна минус трем; оно и будет закрыто доминошкой. То же самое можно будет сказать и про клетку, смежную с данной по этому ребру. Тем самым все клетки окажутся разбитыми на пары, то есть в итоге действительно получится замощение нашего прямоугольника

***Задача 4.***




Рассмотрим окружность, вписанную в угол $A$ и касающуюся внешним образом вписанной окружности треугольника $ABC$. Обозначим такую окружность $\Gamma_A$, а её центр – $O_A$. Аналогично определяются $\Gamma_B$, $\Gamma_C$, $O_B$, $O_C$. Будем двигать эти окружности, сохраняя их вписанной в соответствующий угол: $\Gamma_A(P)$ будет обозначать окружность, вписанную в угол $A$ треугольника и с центром в точке $P$. То есть $\Gamma_A(O_A) = \Gamma_A$, а $\Gamma_A(I)$ – вписанная окружность (где $I$ – центр вписанной окружности). Аналогично определяются семейства окружностей $\Gamma(Q)$ и $\Gamma_C(R)$.




Утверждение: для каждой точки $X$ с отрезка $O_AI$ и соответствующей окружности $\Gamma_A(X)$ существует единственная касающаяся её окружность $\Gamma_B(Y)$ (так же как существует и единственная касающаяся её окружность $\Gamma_C(Z)$). Причём чем больше радиус $\Gamma_A(X)$, тем меньше радиус касающихся её $\Gamma_B(Y)$ и $\Gamma_C(Z)$.

Доказательство этого утверждения почти очевидно: достаточно рассмотреть непрерывное смещение центра $Y$ окружности $\Gamma_B(Y\ )$ от точки $O_B$ до $I$ (вдоль биссектрисы $BI$). Если $\Gamma_A(X)$ не совпадает ни с $\Gamma_A$, ни с вписанной окружностью, то $\Gamma_B(O_B)$ не имеет общих точек с $\Gamma_A(X)$ (так как $\Gamma_B$ лежит снаружи от вписанной окружности), а $\Gamma_B(I)$, т. е. вписанная окружность, окружность $\Gamma_A(X)$ точно пересекает. Значит из непрерывности вытекает, что найдётся такой момент $Y'$, до которого окружности $\Gamma_A(X)$ и $\Gamma_B(Y\ )$ не пересекались, а после которого уже имеют общую точку. Тогда, так как рассматриваемые фигуры замкнуты (т.е. содержат все свои граничные точки), легко видеть, что $\Gamma_A(X)$ и $\Gamma_B(Y')$ также имеют общую точку. Причём если бы эти две окружности не касались, то при малом сдвиге $Y$ в любом из направлений от $Y'$ окружности $\Gamma_A(X)$ и $\Gamma_B(Y)$ пересекаются, а значит $Y'$ не соответствует своему выбору. Противоречие.

Для завершения доказательства рассмотрим одновременное изменение соответственных окружностей $\Gamma_B(Y\ )$ и $\Gamma_C(Z)$ при движении центра $X$ окружности $\Gamma_A(X)$ от $O_A$ до $I$. В начальный момент ($X = O_A$) центры обоих касающихся окружностей $\Gamma_B(Y\ )$ и $\Gamma_C(Z)$ совпадают с точкой $I$, и окружности совпадают. В конечный момент сдвигания $X$ центры $\Gamma_B(Y\ )$ и $\Gamma_C(Z)$ совпадают с точками $O_B$ и $O_C$ соответственно, а сами окружности не пересекаются. При этом сдвигании точки $X$ точка $Y$ движется по стороне $IO_B$ треугольника $IO_BO_C$, точка $Y$ – по стороне $IO_C$. Легко видеть, что при этом расстояние между точками $Y$ и $Z$ непрерывно растёт, а радиусы окружностей непрерывно уменьшаются. В начальный момент времени расстояние между центрами $Y$ и $Z$ меньше суммы радиусов этих двух окружностей (равно 0), а в конечный – больше. Значит, есть единственное положение $X$, когда эти две величины равны друг другу. Полученные положения окружностей $\Gamma_A(X)$, $\Gamma_B(Y\ )$ и $\Gamma_C(Z)$ и являются искомыми (а конструкция единственна из монотонности).

## 11 класс

***Задача 1.*** Заметим, что допустимыми являются лишь $x > 500$.

$$\log_{25}(x - 500) = 1 + \log_x 25$$

Левая часть равенства с ростом $x$ возрастает, а правая – убывает. Значит, уравнение имеет не более одного корня, и этот корень можно угадать: $x = 625$.

***Задача 2.*** Обозначим массы в вершинах $A$, $B$ и $C$ соответственно как $m_A$, $m_B$ и $m_C$. Докажем, что массы $m_A = 0.5(r - r_A)/r_A$, $m_B = 0.5(r - r_B)/r_B$, $m_C = 0.5(r - r_C)/r_C$ подходят.

Покажем, что центр масс системы нагруженных точек $(A,\ m_A)$,$(I,\ 0.5$ кг$)$ находится в точке $I_A$ – центре окружности $\Gamma_A(X)$ (см. решение задачи 4 для 10 кл.). Из подобия соответствующих прямоугольных треугольников вытекает, что $AI : AI_A = r : r_A$. Тогда $II_A/AI_A = (r - r_A)/r_A$. Чтобы точка $I_A$ была центром масс указанных точек, по правилу рычага, должно выполняться $0.5 \cdot II_A = m_A \cdot AI_A$. Подставив указанное значение для $m_A$, легко видеть, что правило рычага выполняется и для пары точек $(A, m_A)$,$(I, 0.5)$ (и центра масс $I_A$), и для пар точек $(B, m_B)$,$(I, 0.5)$ и $(C, m_C)$,$(I, 0.5)$ с центрами масс $I_B$ и $I_C$ соответственно. Тогда, пользуясь принципом перегруппировки масс, имеем, что центр масс системы точек $(I, 1)$,$(A, m_A)$,$(B, m_B)$ и $(C, m_C)$ совпадает с центром масс системы точек $(I, 0.5)$,$(I_A, 0.5{+}m_A)$,$(B, m_B)$,(что совпадает с центром масс системы $(I_A, 0.5 + m_A)$,$(I_B, 0.5 + m_B)$,$(C, m_C)$.

Но $0.5 + m_A = 1/2 + (r{-}r_A)/2r_A = r/2r_A$. Аналогично, $0.5 + m_B = r/2r_B$ и $0.5 + m_C = r/2r_C$ . Значит указанная система нагруженных точек переписывается в виде

$(I_A, r/2r_A)$, $(I_B, r/2r_B)$, $(C, m_C)$.
Окружности $\Gamma_A(I_A)$ и $\Gamma_B(I_B)$, по выбору, касаются. Значит отрезок $I_AI_B$ равен по длине $r_A + r_B$ и делится точкой $T_{AB}$ на части длины $r_A$ и $r_B$. Но тогда для точек $(I_A, r/2r_A)$, $(I_B, r/2r_B)$ и точки $T_{AB}$ выполняется равенство $r/2r_A \ \ I_AT_{AB} + r/2r_B \ I_BT_{AB} = 0$. Значит, $T_{AB}$ – центр масс системы из этих двух точек, а значит центр масс изначальной системы $(I, 1)$,$(A, m_A)$,$(B, m_B)$ и $(C, m_C)$, после перегруппировок, совпадает с центром масс системы двух точек: $(T_{AB}, r/2r_A + r/2r_B)$ ,$(C, m_C)$. Как следствие, этот центр масс лежит на отрезке $T_{AB}C$. По абсолютно аналогичным причинам, центр масс изначальной четвёрки нагруженных точек лежит также на отрезках $BT_{AC}$ и $CT_{AB}$. Таким образом, выбранные веса $m_A$, $m_B$, $m_C$ удовлетворяют требованию задачи

***Задача 3.*** Будем вести индукцию по величине $r(T)$. Если $r(T) = 0$, доказывать нечего, т.к. тогда $H_T = H_{T\min}$, и, как мы доказали в задаче 3 для 10 класса, функция высоты однозначно задает разбиение, откуда $T = T_{\min}$. В противном случае рассмотрим в замощении $T$ функцию $|H_T|$, и пусть $v_1$ — вершина, в которой эта функция достигает глобального максимума (если таких вершин несколько, выберем любую из них). Заметим, что в этой вершине можно сделать флип. Действительно, рассмотрим квадрат $2 \times 2$, центром которого является вершина $v_1$. Тогда или горизонтальные, или вертикальные ребра, выходящее из $v_1$, должны быть закрыты доминошками разбиения $T$ (если из вершины $v_1$ выходит и горизонтальное, и вертикальное ребра, то, сдвинувшись по одному из них, можно увеличить значение $|H_T(v1)|$, что невозможно, т.к. $v_1$ — Точка максимума). Значит, квадрат $2 \times 2$ действительно разбит на две доминошки, и флип возможен. Сделаем флип с центром в этой точке. Данный флип уменьшит приведеную высоту вершины $v_1$ на 1, а высоты остальных вершин оставит без изменений. Таким образом мы получим новое замощение $T'$, для которого $r(T') = r(T) - 1$. Применяя предположение индукции, получаем требуемое.

***Задача 4.*** Изобразим на координатной плоскости трехзвенный манипулятор (звенья длин $|a|$, $|b|$, $|c|$), первое звено $AB$ которого – отрезок с началом в $A(0, 0)$, а третье – отрезок с концом $D(x, y)$. Тогда $\varphi_1$ – угол, образованный первым звеном и осью $x$, $\varphi_2$ и $\varphi_3$ – углы соответственно между первым и вторым, и вторым и третьим звеньями манипулятора, а $\gamma$ – угол между направленным третьим звеном и положительным направлением оси $x$. Изобразим окружности $\omega_A$ и $\omega_D$ с центрами в точках $A$ и $D$ и радиусами $|a|$ и $|c|$ соответственно. Вектор $CD$ (третье звено манипулятора) образует известный угол $\gamma$ – таким образом, точка $C$ имеет координаты $(x - c \cdot \cos\gamma; y - c \cdot \sin\gamma)$. Изобразим окружность $\omega_C$ с центром в точке $C$ и радиусом $|b|$.
Количество общих точек окружностей $\omega_A$ и $\omega_C$ равно количеству решений задачи. Задача не имеет решений, если треугольника (пусть и вырожденного) со сторонами $|AC|$, $|a|$, $|b|$ не существует. Найдем одно из решений задачи.
Рассмотрим $\triangle ABC$ ($BC$ – второе звено манипулятора). В нем $|AB| = |a|$, $|BC| =$

$|b|$, $|AC| = \sqrt{(\mathrm{x} - \mathrm{c} \cdot \cos\gamma)^2 + (\mathrm{y} - \mathrm{c} \cdot \sin\gamma)^2}$. Зная стороны треугольника, найдем его углы (используя теоремы синусов и косинусов).
Так, $\angle BAC = \arccos\frac{a^2+|AC|^2-b^2}{2|a|\cdot|AC|}$, причем $\varphi_1 = \angle BAC + arctg\,\frac{\mathrm{x} - \mathrm{c}\cdot\cos\gamma}{\mathrm{y} - \mathrm{c}\cdot\sin\gamma}$.
Аналогично, $\varphi_2 = \pi - \angle ABC = \pi - \arccos\frac{a^2-|AC|^2+b^2}{2|a|\cdot|AC|}$. Наконец, $\varphi_3 = \gamma - \varphi_1 - \varphi_2$.

## ЗАДАНИЯ 2021–2022 УЧЕБНОГО ГОДА

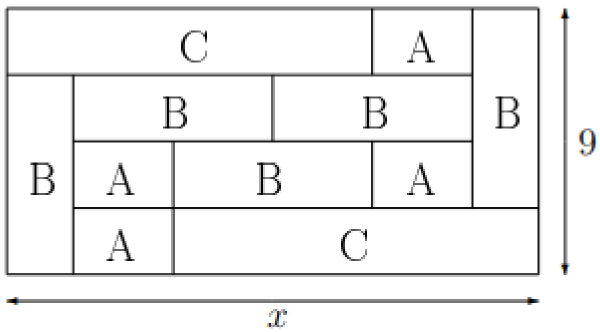
### Задания 1-го отборочного тура

**7 класс**

***Задача 1 (уравнения в целых числах).*** Найдите произведение натуральных чисел $x$ и $y$, удовлетворяющих равенству: $4\frac{2}{x} \cdot y\frac{1}{3} = 10$ (выражение вида $a\frac{b}{c}$ обозначает $a + \frac{b}{c}$).

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 2 (текстовые задачи, уравнения).*** На рисунке изображен большой прямоугольник, разделенный на меньшие прямоугольники трех типов ($A$, $B$, $C$), причем любые два прямоугольника одного типа равны между собой. Меньшая сторона большого прямоугольника равна 9. Найдите его большую сторону $x$.




*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 3 (текстовые задачи).*** Четырёхпалые мемцы делят свои сутки на 16 мемов, а каждый мем – на 64 мемасика. У них часы с круглым циферблатом; мемасиковая и мемная стрелки движутся в одном направлении, их начальные положения совпадают, за 1 мем мемасиковая стрелка совершает полный круг, а мемная стрелка совершает полный круг за сутки. Углы мемцы измеряют в мемасиках (1 мс = 360°/64). В каждом меме (нулевого мема нет, есть 16-й) счастливым считается момент, когда угол между стрелками равен 9 мс. Сколько всего счастливых моментов в сутках?

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 4 (неравенства, представление числа).*** Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное $N$, потом Софья дописывает к нему справа 8 цифр. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем $N$ Софья не может победить?

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 5 (уравнения в целых числах).*** Баржу грузоподъёмностью 220 тонн хотят полностью загрузить контейнерами весом в 16 т и 7 т. Получится ли это сделать? Укажите все способы.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 6 (текстовые задачи).*** Во время операции полиция обнаружила 2021 внешне одинаковые монеты, а также записку, в которой сказано, что 1011 монет настоящие, а остальные – фальшивые. Кроме того, в записке указано, что каждая фальшивая монета на один грамм легче любой настоящей. Эксперт по подделкам пришел с чашечными весами, которые не только показывают, какая чаша нагружена тяжелее, но и указывают разницу в весе грузов на чашах. Эксперт утверждает, что какую бы монету ни выбрала полиция, можно установить, настоящая она или фальшивая, сделав ровно одно взвешивание. Прав ли он?

*(А.А. Гаврилюк)*

**8–9 класс**

***Задача 1 (планиметрия, анализ).*** Дан прямоугольник $ABCD$, на диагонали $BD$ которого расположена точка $E$, из которой на стороны $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ опущены перпендикуляры $EA_1$, $EB_1$, $EC_1$, $ED_1$, соответственно. Найдите наибольшее значение суммы площадей $AA_1ED_1$ и $CC_1EB_1$, если площадь $ABCD$ равна 26.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 2 (неравенства).*** Найдите наименьшее натуральное $n$, при котором число $\sqrt{41+\sqrt{n}}+\sqrt{41-\sqrt{n}}$ является целым.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 3 (комбинаторика).*** Назовем разбиением натурального числа $n$ его представление в виде суммы натуральных слагаемых, при этом разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, будем считать различными. Например, одним из разбиений числа 7 является выражение $1 + 3 + 2 + 1$. Пусть $F(n)$ – количество всех различных разбиений числа $n$. Решите уравнение: $F(n) = 128$.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 4 (рекуррентные последовательности, планиметрия).*** В треугольник $\triangle ABC$ с $AB = AC$ вписана окружность (назовем ее $\omega_0$). Строится последовательность окружностей $\omega_0$, $\omega_1$, $\omega_2$, . . ., причем каждая следующая имеет меньший радиус, чем предыдущая, и касается ее (в частности, $\omega_1$

касается $\omega_0$) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos(\angle A/2) = 8/(5\pi)$. Пусть $\Omega$ – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0$, $\omega_1$, $\omega_2$, . . .. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в $\Omega$. Ответ округлите до сотых.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 5 (теория чисел).*** Найдите две последние цифры числа $14^{2021} + 15^{2021}$. Запишите эти цифры в ответ без пробелов, т. е. в виде двузначного числа.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 6 (комбинаторика).*** В языке ABAB словом называется любая последовательность букв A и B. Сколько существует различных слов этого языка, записываемых при помощи 15 букв, в которых содержатся 5 сочетаний AA и по 3 сочетания AB, BA и BB? Сочетанием букв здесь называется последовательность из двух букв, идущих подряд. Например, в слове ABAAB есть 4 сочетания букв: AB, BA, AA, AB.

*(А.А. Гаврилюк)*

## 10–11 класс

***Задача 1 (стереометрия).*** В сосуд, имеющий форму прямого кругового конуса, наливают воду. Если сосуд установлен «острым» концом вниз, то расстояние от уровня воды до плоскости основания конуса равно 1 м. Когда сосуд перевернули, оказалось, что расстояние от уровня воды до «острого» конца сосуда равно $\sqrt[3]{4}$ м. Найдите высоту сосуда, ответ дайте в метрах, при необходимости округлив до сотых. Объем конуса может быть найден по формуле $V = S \cdot h/3$, где $S$ – площадь его основания, $h$ – высота.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 2 (представление числа).*** Варя и Софья играют в игру: Варя пишет на доске натуральное $N$, потом Софья дописывает к нему справа 8 цифр. Если получился квадрат натурального числа, то Софья побеждает. При каком наименьшем $N$ Софья не может победить?

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 3 (рекуррентные последовательности, планиметрия).*** В треугольник $\triangle ABC$ с $AB = AC$ вписана окружность (назовем ее $\omega_0$). Строится последовательность окружностей $\omega_0$, $\omega_1$, $\omega_2$, . . ., причем каждая следующая имеет меньший радиус, чем предыдущая, и касается ее (в частности, $\omega_1$ касается $\omega_0$) и сторон угла $\angle A$. Известно, что $\cos(\angle A/2) = 8/(5\pi)$. Пусть $\Omega$ – объединение множеств точек, лежащих внутри окружностей $\omega_0$, $\omega_1$, $\omega_2$, . . .. Найдите вероятность того, что точка, случайным образом выбранная внутри $\triangle ABC$, содержится в $\Omega$. Ответ округлите до сотых.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 4 (теория чисел, комбинаторика).*** Найдите количество пар $(x;\ y)$ натуральных чисел, являющихся решением уравнения

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2021^2}$$

Если $x \neq y$, то пары $(x;\ y)$ и $(y;\ x)$ считаются различными.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 5 (геометрические построения, планиметрия).*** Опишите алгоритм построения (с помощью циркуля и линейки без делений) прямоугольного треугольника по гипотенузе и отношению катетов, равному $\sqrt{3}$. С помощью циркуля можно проводить окружности произвольного либо заданного радиуса, а линейка позволяет проводить произвольную прямую, либо прямую, проходящую через одну или две заданные точки. Также можно отмечать произвольную точку плоскости (прямой, отрезка, окружности) и точки пересечения прямых и окружностей.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 6 (алгебраические уравнения, неравенства).*** Решите для положительных $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + \dfrac{18}{x_2} = 12 - (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 \\ 2x_2 + \dfrac{18}{x_3} = 12 - (x_2 - 2x_3 + x_1)^2 \\ \ldots \\ \ldots \\ 2x_{2021} + \dfrac{18}{x_1} = 12 - (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2 \end{cases}$$

*(Д.Е. Бебчук)*

## Задания 2-го отборочного тура

### 7 класс

***Задача 1 (текстовые задачи).*** Найти количество пар $(x;\ y)$ натуральных чисел, удовлетворяющих равенству

$$x + y = g(x, y) + 6$$

Здесь $gcd(x, y)$ – наибольший общий делитель $x$ и $y$. Если $x \neq y$, то пары $(x;\ y)$ и $(y;\ x)$ считаются различными.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 2 (комбинаторика).*** Есть лист бумаги с нарисованной сеткой 10 × 10 квадратных клеток. Сколько можно нарисовать попарно несовпадающих квадратов, все стороны которых лежат на линиях сетки? Квадраты могут пересекаться друг с другом.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 3 (рекуррентные последовательности, представление числа).*** Последовательность натуральных чисел $a_1$, $a_2$, $a_3$, . . . строится следующим образом: число $a_1$ выбирается из чисел от 1 до 999999, а каждое следующее число строится по предыдущему: если $a_n$ – чётное, то $a_{n+1} = a_n/2$; если $a_n$ – нечётное, то $a_{n+1} = a_n + 1$; если $a_n = 1$, то последовательность не продолжается. Какова наибольшая возможная длина этой последовательности?

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 4 (планиметрия).*** Дан правильный 2021-угольник (все его стороны равны, все углы тоже равны) $A_1A_2A_3 \ldots A_{2020}A_{2021}$. Точки $B$ и $C$ – середины сторон $A_{1846}A_{1847}$ и $A_{1842}A_{1843}$ соответственно. Найдите меньший из углов между прямыми $A_1B$ и $A_{2018}C$, ответ дайте в градусах, при необходимости округлив до сотых.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 5 (неравенства).*** Сравните числа $26^{47}$ и $11^{71}$.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 6 (теория чисел).*** Найдите цифру, стоящую в разряде сотен десятичной записи числа $5^{4^{3^{2^{7}}}}$.

*(Д.Е. Бебчук)*

**8–9 класс**

***Задача 1 (планиметрия).*** В прямоугольнике $ABCD$ из вершин $B$ и $D$ опущены перпендикуляры на диагональ $AC$. Эти перпендикуляры пересекают диагональ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Найдите площадь прямоугольника, если $AP = 2$, $PQ = 6$.

*(А.А. Гаврилюк)*

***Задача 2 (комбинаторика).*** Найти количество пар $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющих равенству

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{20339}$$

Если $x \neq y$, то пары $(x; y)$ и $(y; x)$ считаются различными.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 3 (комбинаторика).*** Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N \times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 11025 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное $N$.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 4 (теория чисел).*** Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{11}}}$$

Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т. е. в виде четырехзначного числа.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 5 (функциональные уравнения).*** Найдите все функции $f(x)$, которые при любых вещественных $x, y$ удовлетворяют равенству

$$(x^2 + y) = f(x^2 - y) + 2x^4\, f(y)$$

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 6 (алгебраические уравнения).*** Решите уравнение: $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+2)^3} = 88$

*(Д.Е. Бебчук)*

**10–11 класс**

***Задача 1 (стереометрия).*** Дана шестиугольная призма, основания которой – правильные шестиугольники $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ со стороной $2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а боковые ребра перпендикулярны основаниям и равны $\sqrt{7}$. Центры оснований – точки $O$ и $O_1$ соответственно; точка $X$ – середина отрезка $OA$, точка $Y$ – середина $O_1C_1$. Известно, что пчела проползла по поверхности этой призмы из точки $X$ в точку $Y$ по наикратчайшей траектории. Найдите длину этой траектории.

*(А.А. Гаврилюк)*

***Задача 2 (уравнения в целых числах).*** Найдите наибольшее натуральное $n$, при котором выражение $\sqrt{n} + \sqrt{n + 2021}$ принимает целое значение.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 3 (комбинаторика).*** Есть лист бумаги с нарисованной сеткой $N \times N$ квадратных клеток. Известно, что на нем можно нарисовать 11025 попарно несовпадающих прямоугольников, стороны которых совпадают с линиями сетки (прямоугольники могут пересекаться друг с другом). Найдите наименьшее возможное $N$.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 4 (теория чисел).*** Найдите последние четыре цифры десятичной записи числа

$$5^{5^{5^1}} + 5^{5^{5^2}} + \cdots + 5^{5^{5^{11}}}$$

Запишите эти цифры в поле для ответа с сохранением их порядка без пробелов и других символов, т. е. в виде четырехзначного числа.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 5 (анализ).*** Решите для $x > 1$: $\sqrt{x} + \sqrt[9]{x} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[7]{x}$

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 6 (математические игры).*** Равносторонний треугольник со стороной 20 разделен линиями, параллельными его сторонам, на равносторонние треугольники со стороной 1, которые будут использоваться как игровые поля. На этой доске Анна и Борис играют в игру: Анна ходит первой – ставит фишку на одно из игровых полей (т. е. в один из треугольников со стороной 1). Далее, начиная с первого хода Бориса, игроки по очереди сдвигают фишку в соседнее по стороне игровое поле, при этом запрещено сдвигать фишку в поле, в котором она уже была. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
Может ли кто-то из игроков гарантировать себе победу независимо от игры соперника?

*(П.В. Бибиков)*

## Задания финального тура

### 7 класс

***Задача 1 (текстовые задачи).*** В зале собрались горожане, каждый из которых – либо честный, либо жулик, либо хитрец, и все друг про друга знают, кто есть кто. Каждый из честных написал на листе количество честных (включая себя), каждый жулик написал суммарное количество хитрецов и жуликов (включая себя), а каждый хитрец написал количество жуликов. Затем в зал вошел секретарь, не знающий никого из присутствующих, и собрал все листы. В каком случае секретарь **не сможет** по написанным числам восстановить количество честных людей в зале?

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 2 (теория чисел).*** Дан правильный 100-угольник (все его стороны равны, все углы тоже равны). Докажите, что если соединить его вершины замкнутой ломаной так, чтобы в каждую вершину входило бы ровно два звена ломаной, то в этой ломаной найдутся два параллельных звена.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 3 (теория чисел).*** На планете Рамануджан монетами служат титановые кубики. Длина ребра монеты-кубика – 1, 2, . . . , 8 в местных единицах измерения, а номинал равен ее весу. Вес самой маленькой монеты – 1 джан. Для удобства счёта стоимость в 9 джанов называется раману. Вы купили товар стоимостью в целое число раману, заплатили 3 монеты и получили сдачу – несколько (меньше 8) джанов. Если ни одна из монет не была лишней (т.е. любых двух из трех не хватило бы), то какое количество джанов сдачи вы **не смогли бы** получить? Какова минимальная стоимость товара, если вы получили сдачу в 1 джан?

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 4 (планиметрия).*** Правильный шестиугольник $ABCDEF$ и правильный треугольник $APQ$ не имеют общих внутренних точек. Известно, что $PB < QB$, и точка $M$ – середина отрезка $PB$. Найдите угол между прямыми $AM$ и $QF$.

*(Д.Ю. Бродский)*

***Задача 5 (теория чисел, уравнения в целых числах).*** Математик стоит на земле перед лестницей с $n$ ступеньками. Когда математик поднимается, он может перешагнуть ровно через $a$ ступенек (считая ту, на которую он наступил, и не считая ту, с которой начал движение), а когда спускается – ровно через $b$ ступенек (аналогично, считая ту, на которую он наступил, и не считая ту, с которой начал движение). Математик хочет с уровня земли («нулевая ступенька») подняться на самую верхнюю ступеньку и спуститься обратно на землю. Докажите, что наименьшее $n$, при котором это возможно, равно $a + b - (a, b)$.
Здесь $(a, b)$ – наибольший общий делитель чисел $a$ и $b$.

*(П.В. Бибиков)*

## 8–9 класс

***Задача 1 (комбинаторика).*** В городе 50 киберспортивных клубов и $N$ киберспортсменов, причем каждый киберспортсмен посещает 1 или 2 клуба. В каждом клубе не более 55 участников, и для любых двух клубов найдется киберспортсмен, который посещает оба. Найдите все возможные значения $N$.

*(А.А. Гаврилюк)*

***Задача 2 (планиметрия).*** Точка $M$ – середина стороны $AB$ треугольника $ABC$. Точка $K$ выбирается на отрезке $AB$ так, что $\angle BCK = \angle ACM$. Точки $P$ и $Q$ на сторонах $BC$ и $AC$ таковы, что $KP \parallel AC$ и $KQ \parallel BC$. Докажите, что четырехугольник $BPQA$ – вписанный.

*(Д.Ю. Бродский)*

***Задача 3 (функциональные уравнения).*** Найдите все функции $f(x)$, которые при любых $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ удовлетворяют равенству

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$$

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 4 (текстовые задачи, математические игры).*** Султан поймал двоих математиков и сказал им:
«Завтра в каждом из четырех углов этого зала я поставлю по сундуку, на каждом из которых будет написано какое-то целое число, и первый из вас будет тому свидетелем. На его глазах в один из этих сундуков я положу ключ от вашей тюрьмы, и первый из вас должен будет увеличить на единицу число, написанное на одном из сундуков по его выбору. Затем я уведу этого человека и, не двигая сундуки, приведу второго, и он должен будет с первой попытки угадать, в каком сундуке ключ. Если угадает – вы оба свободны, если же он не справится – значит, оба останетесь в моей тюрьме навсегда. А пока идите в свою камеру и думайте, можете ли спастись».
Как должны действовать математики, чтобы гарантированно спастись? Учтите, что завтра у них не будет возможности переговариваться друг с другом.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 5 (многочлены).*** Параболы, заданные уравнениями $y = x^2 - a$ и $x = y^2 - b$, пересекаются в четырех различных точках $P_i(x_i, y_i)$, где $i = 1, 2, 3, 4$. Вычислите значение выражения $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)$.

*(П.В. Бибиков)*

**10–11 класс**

***Задача 1 (теория вероятностей).*** Все марсиане делятся на одноглазых, двуглазых и трехглазых. Марсианин отдыхает только тогда, когда закрыт хотя бы один его глаз, причем каждую секунду каждый глаз может быть открыт с вероятностью 0.5 независимо от остальных. Известно, что среди всех марсиан, у которых не меньше двух глаз, каждую секунду в среднем 80% отдыхают, а среди тех, у которых не больше двух глаз, каждую секунду отдыхают в среднем 2/3 марсиан. Найдите долю двуглазых марсиан среди всех марсиан.

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 2 (комбинаторика, графы, индукция).*** Проводится шахматный турнир, в котором участвуют $n$ человек ($n > 2$). Из-за эпидемической обстановки партии проходят в отдельных помещениях, причем в каждом помещении шахматист может играть только фигурами одного цвета.
Например, если Иван играл черными фигурами в помещении №1, то он уже не сможет сыграть белыми фигурами в этом помещении. Аналогично, если участник играл белыми фигурами в помещении №5, то в этом же помещении он уже не сможет играть черными фигурами. При этом он может снова играть белыми фигурами в помещении №5.

Известно, что каждый участник турнира должен сыграть с любым другим участником ровно одну партию. Организаторы хотят составить такое расписание, чтобы задействовать минимально возможное число помещений. Докажите, что это число равно $\lceil \log_2 n \rceil$.
Здесь $\lceil x \rceil$ – наименьшее целое число, не меньшее $x$.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 3 (математические игры).*** Два игрока играют в игру: они по очереди вытаскивают камни из кучки, в которой изначально было $n$ камней. В свой первый ход первый игрок берет из кучи один или несколько камней, но не может забрать все камни. Каждым следующим ходом очередной игрок должен забрать из кучи количество камней, являющееся делителем числа камней, забранного противником на предыдущем ходу, и не превосходящее числа камней в куче. Выигрывает тот, кто заберет последний камень. Для каждого $n > 1$ определите, у кого из соперников есть выигрышная стратегия.

*(А.А. Гаврилюк)*

***Задача 4 (рекуррентные последовательности, индукция).*** Назовем бесконечную числовую последовательность $\{a_n\}$ стабилизирующейся, если при некотором $k_0$ для всех $k \geq k_0$ выполнено $a_k = a_{k+1}$. Тогда $k_0$ назовем временем стабилизации, $a_k$ (при $k \geq k_0$) – стабильным значением.
Пусть $a$, $b$ – натуральные числа. Дана последовательность $\{x_n\}$, в которой $x_1 = x_2 = x_3 = a$ и для любого натурального $n$ выполнены равенства $x_{3n+1} = b \cdot x_{3n-2}$, $x_{3n+2} = x_{3n-1} \circ b$ (здесь $\circ b$ – это операция взятия целой части при делении на $b$), $x_{3n+3} = x_{3n} + x_{3n-2} \cdot (x_{3n-1} \pmod{b})$ (здесь $(\bmod\ b)$ – операция взятия остатка от деления на $b$).
Какие из последовательностей $\{x_{3n+1}\}$, $\{x_{3n+2}\}$, $\{x_{3n}\}$ ($n \in \mathrm{N}$) стабилизируются, и чему равны их стабильные значения? Чему равно время стабилизации последовательности $\{x_{3n}\}$?

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 5 (планиметрия).*** Олег и Оливер гоняют на велосипедах с одинаковыми угловыми скоростями: Оливер – по круговой траектории $\mathcal{A}$, а Олег – по круговой траектории $\mathcal{T}$ в два раза меньшего радиуса, причем они стартуют с двух ближайших точек окружностей и круг Олега лежит внутри круга Оливера. По окружности $\mathcal{T}$ также движутся два помощника, поддерживающих экран (т. е. хорду с концами в точках, в которых расположены помощники) так, что расстояние от каждого из них до Олега всегда такое же, как и расстояние от Олега до Оливера. Докажите, что на протяжении всей гонки экран касается некоторой фиксированной окружности.

*(Д.Ю. Бродский)*

# РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ 2021–2022 УЧЕБНОГО ГОДА

## Задания 1-го отборочного тура

### 7 класс

***Задача 1.*** Если $y \geq 3$, то $4\frac{2}{x} \cdot y\frac{1}{3} > 4\frac{2}{x} \cdot y > 4y \geq 12 > 10$. Если $y = 1$, то $4\frac{2}{x} = \frac{15}{2}$, то невозможно для натуральных $x$. Значит, $y = 2$. Отсюда легко находим $x = 7$ и $x \cdot y = 14$.

***Задача 2.*** Пусть стороны прямоугольника $A$ равны $a$, $b$, стороны прямоугольника $C$ – $a$, $c$. Тогда стороны прямоугольника $B$ равны $a$, $2b$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a + 2b = 9 \\ 3a = 2b \\ c + b = a + 4b \\ a + b + c = x \end{cases}$$

Решая систему, найдем $x = 2 \cdot 9 = 18$.

***Задача 3.*** Заметим, что угол от мемной стелки к мемасиковой (зафиксируем направление) меняется на протяжении каждого -го мема от $4(1 - n)$ мс до $4n$ мс.; понятно, что это 60мс., а не полный круг в 64мс. Значит, 3-й и 14-й мемы имеют по одному счастливому моменту, а остальные – по два. Итого 30 счастливых моментов.

***Задача 4.*** Пусть $N$ – число, написанное Варей, а $M$ – число, состоящее из цифр, дописанных Софьей. Если найдется натуральное $c$, такое, что $c^2 < 10^8 \cdot N$ и $(c + 1)^2 \geq 10^9 \cdot N$, то Софья не сможет победить: при любом $0 \leq M < 10^8$ число $\overline{NM} = 10^8 \cdot N + M$ не будет квадратом натурального числа, поскольку будет заключено между $c^2$ и $(c + 1)^2$.
Заметим, что $(c + 1)^2 - c^2 = 2c + 1$. Значит, если $2c + 1 < 10^8$, то среди любых $10^8$ подряд идущих натуральных чисел, меньших $(c + 1)^2$, найдется квадрат натурального числа. Отсюда $c > 5 \cdot 10^7$ – значит, $\overline{NM} > (5 \cdot 10^7)^2 = 25 \cdot 10^{14}$. При этом $(5 \cdot 10^7 + 1)^2 = 2500000100000001 = 25 \cdot 10^{14} + 10^8 + 1$.
Последующие квадраты дают $25000002 \cdot 10^8 + 1 + 3$; $25000003 \cdot 10^8 + 1 + 3 + 5$; . . . и т.д. вплоть до $25009999 \cdot 10^8 + m_1 = 50009999^2$, после которого идет $50010000^2 = 25010001 \cdot 10^8 + m_2$ для $m_1, m_2 < 10^8$.
Таким образом, наименьшее искомое число – 25010000.

***Задача 5.*** Пусть $x$ – количество контейнеров весом 16 т, $y$ – количество контейнеров весом 7 т. Тогда $16x + 7y = 220 \Rightarrow y = (220 - 16x)/7$. Поскольку 220 дает остаток 3 при делении на 7 и $y$ – целое, значит, $16x$ тоже дает остаток 3 при делении на 7. Выпишем остатки при делении $x$ и $16x$ на 7:

| $x$ (mod 7) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $16x$ (mod 7) | 0 | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 |

Значит, $x$ дает остаток 5 при делении на 7 и $0 \le x \le 220/16 \in (13;\ 14)$. Отсюда возможные значения $x$ – это 5 или 12. Подставляя их в исходное уравнение, получим соответствующие значения $y$.

***Задача 6.*** Для определения подлинности монеты достаточно разделить все монеты, кроме выбранной полицией, на две равные части и посмотреть на разность их весов. Докажем, что от четности этой разности зависит подлинность выбранной монеты. Действительно, пусть на одной чаше находятся $a$ фальшивых монет, а на другой – $b$ фальшивых монет. Тогда разность, которую покажут весы, равна $|b - a|$ и имеет ту же четность, что и сумма $a$+$b$. Значит, мы в результате взвешивания мы узнаем четность числа фальшивых монет, находящихся на весах. Зная четность общего числа фальшивых монет, мы сразу определим подлинность той монеты, которой на весах не было (т.е. той, которую выбрала полиция). Значит, эксперт прав.

## 8–9 класс

***Задача 1.*** Пусть длины отрезков $EA_1$, $EB_1$, $EC_1$, $ED_1$ равны $a,\ b,\ c,\ d$ соответственно, а длины отрезков $AD$, $AB$ – $x$, $y$ соответственно. Тогда

$$\begin{cases} ab = xy - a(x - b) - b(y - a) \\ cd = xy - d(x - c) - c(y - d) \end{cases}$$

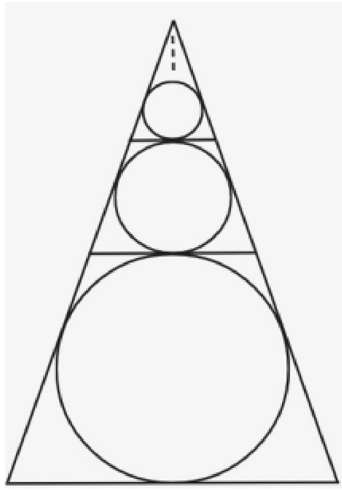
Раскрывая скобки и вычитая одно уравнение из другого, получим $ab = cd$. Значит, задача сводится к нахождению $2S$, где $S$ – максимальное значение $ab$. Из подобия треугольников $DD_1E$ и $DAB$ имеем $\frac{a}{y} = \frac{x-b}{x} \Rightarrow\ b = -a\frac{x}{y} + x \Rightarrow$ $ab = -a^2\frac{x}{y} + ax$.

Будем рассматривать последнее выражение как функцию $f(a)$ с параметрами $x$, $y$. График этой функции – парабола с максимумом $xy/4$ при $a = y/2$. Значит, $2S = xy/2$.

***Задача 2.*** Пусть $\sqrt{41+\sqrt{n}} + \sqrt{41-\sqrt{n}} = c \in Z$, причем $c > 0$. Значит, $c^2 = 82 + 2\sqrt{41^2 - n} < 162$, т.к. $n > 0$. Чем меньше $n$, тем больше $c$ – значит, задача сводится к поиску наибольшего возможного $c$, такого, что $c^2 < 162$ и $n$ – натуральное. Значит, $c^2 = 144 \Rightarrow c = 12$: тогда $2\sqrt{41^2 - n} = 62 \Rightarrow \sqrt{41^2 - n} = 31 \Rightarrow 41^2 - n = 31^2 \Rightarrow n = 720$.

***Задача 3.*** Найдем количество разбиений натурального $n$. Для этого представим его в виде $1 + 1 + \cdot\cdot\cdot + 1$ – запись, состоящая из $n$ единиц и $n - 1$ плюсов. Каждому разбиению соответствует расстановка вместо некоторых

(возможно, ни одного, а возможно, всех) плюсов «перегородок», разделяющих слагаемые разбиения.
Например, для $n = 6$ одно из разбиений строится так:
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \to 1 + 1 \mid 1 \mid 1 + 1 + 1 \to 2 + 1 + 3$
Значит, количество разбиений равно количеству способов расставить вместо $n - 1$ плюса перегородки в количестве от 0 до $n - 1$. При этом количество способов расставить $k$ перегородок равно $C^k{}_{n-1}$. Таким образом, количество разбиений равно $C^0{}_{n-1} + C^1{}_{n-1} + \cdot\cdot\cdot + C^{n-1}{}_{n-1} = 2^{n-1}$. Значит, $F(n) = 2^{n-1}$.
$2^{n-1} = 128 \Rightarrow n = 8$.



***Задача 4.*** Проведем прямые, параллельные $BC$ и касающиеся построенных окружностей. Эти прямые разобьют треугольник $ABC$ на бесконечное количество равнобедренных подобных (ввиду равенства всех углов и описанности вокруг окружности) трапеций. Вычислим вероятность того, что точка, попавшая в одну из этих трапеций, окажется внутри вписанной в нее окружности.
Пусть основания этой трапеции равны $x$ и $y$, радиус вписанной окружности равен $R$. Угол между боковой стороной и высотой трапеции равен $\angle A/2$. Тогда $cos\,(\angle A/2) = \frac{2R}{1/2(x+y)}$, поскольку сумма длин оснований равна удвоенной боковой стороне трапеции (ввиду существования вписанной окружности). Искомая вероятность равна отношению площади круга к площади трапеции:

$$P = \frac{\pi R^2}{R(x + y)} = \frac{\pi}{4}\,cos\,(\frac{\angle A}{2})$$

Найденная вероятность равна вероятности, о которой говорится в условии задачи, поскольку зависит только от угла $\angle A/2$: точка, случайно «брошенная» в треугольник, окажется в одной из трапеций, после чего с равной вероятностью окажется внутри вписанной в трапецию окружности. Значит, $P = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{8}{5\pi} = 0{,}4$.

***Задача 5.*** Выпишем последние две цифры чисел $14^n$ и $15^n$:

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $14^n$ (mod 100) | 14 | 96 | 44 | 16 | 24 | 36 | 04 | 56 | 84 | 76 | 64 | 96 |
| $15^n$ (mod 100) | 15 | 25 | 75 | 25 | 75 | 25 | 75 | 25 | 75 | 25 | 75 | 25 |

Две последние цифры чисел $14^n$, начиная с $n = 2$, повторяются с периодом 10; две последние цифры чисел $15^n$, начиная с $n = 2$, повторяются с периодом 2. Значит, две последние цифры чисел $14^n + 15^n$, начиная с $n = 2$, повторяются с периодом 10. Таким образом, последние две цифры числа $14^{2021} + 15^{2021}$ совпадают с последними двумя цифрами числа $14^{11} + 15^{11}$, т.е. равны 39.

***Задача 6.*** Каждая буква слова, кроме первой и последней, входит в два сочетания. Поэтому общее количество букв А из этих сочетаний – это либо удвоенное их количество в слове (если первая и последняя буквы – не А), либо удвоенное их количество минус 1 (если ровно одна буква А стоит с краю), либо удвоенное их количество минус 2 (если слово начинается и заканчивается на А). Общее количество букв А в двухбуквенных сочетаниях равно 16 – значит, количество букв А в слове – либо 8, либо 9.
1) Если в слове 9 букв А, то первая и последние буквы слова – А. Назовем блоком группу одинаковых букв, идущих подряд, которую нельзя увеличить ни слева, ни справа (например, в слове AABBABBBA ровно 5 блоков: AA, BB, A, BBB, A). Тогда каждый блок букв В начинается с сочетания АВ и заканчивается сочетанием ВА (не забываем, что первая и последняя буквы слова - А) – значит, блоков с буквами В ровно 3 (по количеству сочетаний АВ и ВА). Количество способов разбиения последовательности из 9 букв А тремя блоками букв В равно количеству способов выбрать три «зазора» между парой букв А из 8 «зазоров», т. е. $C^3{}_8$.
Количество способов распределить 6 букв В между этими тремя блоками равно количеству способов вставить две перегородки в последовательность этих букв при 5 «зазорах» между ними, т. е. $C^2{}_5$.
2) Аналогично, если количество букв А равно 8, значит, слово начинается и заканчивается на В. В слове есть три блока букв А и 3 позиции, куда вставить эти блоки в последовательность из 7 букв В – $C^3{}_6$ способов, а количество способов распределить буквы А между этими тремя блоками равно $C^2{}_7$.
Итак, общее количество слов равно $C^3{}_8 \cdot C^2{}_5 + C^3{}_6 \cdot C^2{}_7 = 980$.

## 10–11 класс

***Задача 1.*** Пусть $h$ – высота сосуда, $V_0$ – его объём, $R$ – радиус основания, $V$ – объём воды. Если сосуд установлен «острым» концом вниз, то вода заполняет конус высоты $h - 1$ и радиусом основания $R_1 = \frac{h-1}{h} R$ (ввиду подобия осевых сечений конусов). После переворачивания вода заполняет усеченный конус высотой $h - x$ (здесь $x = \sqrt[3]{4}$) с радиусами оснований $R$ и $R_2 = \frac{x}{h} R$.
Применяя формулу объёма конуса, получим $h^3 - (h-1)^3 = x^3$, откуда $h = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.62.$

***Задача 2.*** См. решение задачи №4 для 7 кл.

***Задача 3.*** См. решение задачи №4 для 8–9 кл.

***Задача 4.*** Рассмотрим уравнение в натуральных числах с натуральным параметром $n$:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{n} \Rightarrow xy - nx - ny = 0 \Rightarrow xy - nx - ny + n^2 = n^2 \Rightarrow (x - n)(y - n) = n^2$, где $x, y > n$.

Каждому решению $(x, y)$ этого уравнения соответствует упорядоченная пара $(d_1, d_2)$ натуральных чисел, для которых $d_1 \cdot d_2 = n^2$. Количество таких пар равно количеству делителей числа $n^2$. При этом количество делителей числа $p^{k1}{}_1\, p^{k2}{}_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot p^{km}{}_m$ (для различных простых $p_i$ и натуральных $k_i$) равно $(k_1 + 1)(k_2 + 1)\cdot \cdot \cdot(k_m + 1)$. Количество делителей числа $2021^{2k} = 43^{2k} \cdot 47^{2k}$ равно $(2k + 1)^2$. Значит, количество решений исходного уравнения (т. е. для $k = 2$) равно 25.

***Задача 5.*** Сначала отложим на произвольной прямой отрезок заданной длины (обозначим ее за $x$). Проведем окружности радиуса $x$ с центрами в концах этого отрезка – они пересекутся в двух точках, каждая из которых вместе с концами исходного отрезка образует тройку вершин равностороннего треугольника. Разделим пополам одну из сторон этого треугольника и соединим ее центр с противоположной вершиной – получим треугольник, гипотенуза которого равна заданному отрезку, а отношение катетов равно $tg\, 60^o = \sqrt{3}$.

*Комментарий.* В решении задач 3 и 4 задействуется алгоритм построения треугольника, подобного исходному. Этот алгоритм базируется на следующем:

Пусть на луче $AB$ отмечены точки $B_1$, $B_2$, на луче $AC$ – точки $C_1$, $C_2$, причем точки $A$, $B$, $C$ не лежат на одной прямой. Если $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, то $\frac{AB_1}{B_1B_2} = \frac{AC_1}{C_1C_2}$.

Истинность этого утверждения немедленно следует из подобия $\triangle AB_1C_1$ и $\triangle AB_2C_2$.

Таким образом, если мы построим треугольник, подобный требуемому, то далее потребуется произвести построение, реализующее гомотетию с центром в одной из вершин этого треугольника с коэффициентом, равным отношению построенного отрезка (в задаче 3 – радиуса вписанной окружности, в задаче 4 – периметра) к заданному по условию.

***Задача 6.*** Согласно неравенству Коши, для положительных $a$, $b$ выполнено $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$, причем равенство достигается при $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Значит, $2t + \frac{18}{t} \geq 12$ и равенство достигается при $t = 3$.

Складывая уравнения исходной системы, получим $2x_1 + \frac{18}{x_1} + 2x_2 + \frac{18}{x_2} + \cdot \cdot \cdot + 2x_{2021} + \frac{18}{x_{2021}} = 12 \cdot 2021 - A$, где $A = (x_1 - 2x_2 + x_{2021})^2 + (x_2 - 2x_3 +$

$x_1)^2 + \cdot \cdot \cdot + (x_{2021} - 2x_1 + x_{2020})^2$, т.е. $A \geq 0$.
Левая часть полученного равенства не меньше 12 · 2021 согласно неравенству Коши, а правая – не больше 12 · 2021. Значит, для достижения равенства необходимо $x_1 = x_2 = \cdot \cdot \cdot = x_{2021} = 3$, что дает $A = 0$. Легко убедиться, что указанные значения переменных подходят.

## Задания 2-го отборочного тура

### 7 класс

***Задача 1.*** Пусть $x = ad$, $y = bd$, где $d = gcd(x,\ y)$. Уравнение примет вид $d(a+b-1) = 6$, причем $gcd(a,\ b) = 1$. Числа $d$ и $a+b-1$ – натуральные, их произведение равно 6, отсюда возможные значения $d$ – либо 1, либо 2, либо 3, либо 6.
В первом случае $a + b - 1 = 6 \Rightarrow a + b = 7$, что дает 6 пар $(a,\ b)$.
Во втором случае $a + b = 4$, что дает две пары взаимно простых $(a,\ b)$: (1, 3) и (3, 1). Случай $d = 3$ дает $a + b = 3$ и еще две пары $(a,\ b)$. Наконец, при $d = 6$ имеем $a + b = 2$ и еще одну пару $(a,\ b)$. Итого получили 11 пар $(a,\ b)$, каждая из которых дает одну пару $(x,\ y)$, удовлетворяющую исходному уравнению.

***Задача 2.*** Очевидно, квадратов $1 \times 1$ ровно $10^2$ штук. Каждый квадрат $2 \times 2$ однозначно задается своим нижним левым квадратом $1 \times 1$, который можно выбрать $9^2$ способами (квадраты из «верхнего» и «правого» слоев не подходят). Далее аналогично: квадрат $3 \times 3$ выбирается $8^2$ способами и т. д., квадрат $10\times10$ выбирается $1^2 = 1$ способом. Итого $1^2+2^2+\cdot\ \cdot\ \cdot+9^2+10^2$ способов выбрать квадрат на заданной сетке.
Докажем индукцией по $n$, что $1^2 + 2^2 + \cdot \cdot \cdot + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ для любого натурального $n$. База индукции ($n = 1$): $1^2 = 1\cdot(1+1)\cdot(2+1)/6$ – верное равенство.
Шаг индукции: пусть $1^2+2^2+\cdot\ \cdot\ \cdot+k^2 = k(k+1)(2k+1)/6$ для натурального $k$.
Докажем, что $1^2+2^2+\cdot\ \cdot\ \cdot+ k^2+ (k+1)^2 = (k+1)(k+2)(2(k+1)+1)/6$.
Действительно, $1^2+2^2+\cdot\ \cdot\ \cdot+k^2+ (k+1)^2 = k(k+1)(2k+1)/6 + (k+1)^2 = (k+1)(2k\ 2 + k + 6(k + 1))/6 = (k+1)(k + 2)(2k + 3)/6$, что и требовалось доказать.
Значит, $1^2 + 2^2 + \cdot \cdot \cdot + 9^2 + 10^2 = 10\cdot11\cdot21/6 = 385$.
***Задача 3.*** Перейдем к двоичной системе счисления. Деление четного числа на 2 означает отбрасывание последнего нуля в записи числа, а прибавление к нечетному числу единицы заменяет блок из единиц, начинающийся с младшего разряда и идущий до первой нулевой цифры (либо до конца числа, если оно изначально состояло только из единиц), на блок нулей с приписыванием перед ними единицы.
Количество цифр в числе меняется только в случае, если число состояло из одних единиц – тогда после прибавления 1 оно становится степенью двойки.
Докажем, что прибавление единицы с увеличением числа разрядов должно хотя бы раз произойти при построении последовательности, начинающейся с

$a1$, не равного степени двойки. Это будет означать, что оно случится ровно один раз, потому что если в какой-то момент членом последовательности становится степень двойки, то после этого остается только делить на 2 (отбрасывать нули).
Предположим противное: пусть такого увеличения числа разрядов не случится. Тогда все операции прибавления единиц не приводят к увеличению количества разрядов, не менее одной из двух подряд идущих операций будет отбрасывание нуля – значит, если изначальное количество цифр в двоичной записи $a1$ равно $m$, то не более чем за $2(m-1)$ шагов мы получим число 1 (единственное ненулевое число, состоящее из одной цифры в двоичной записи). Но 1 можно получить только из числа 2, которое является степенью двойки, которая не могла быть получена прибавлением единицы – значит, она получена делением. Пусть до получения числа 1 $k$ последних операций были делением на 2 (но не $k$ + 1 операций). Тогда ($k$ + 1)-я с конца операция была прибавлением 1 к числу, состоящему из одних единиц – противоречие с предположением.
Получается, если двоичная запись $a_1$ (не являющегося степенью двойки) содержала $m$ цифр, то при построении последовательности случится одна операция приписывания единицы и $m$ операций деления на 2, остальные операции – прибавление единицы к нечетному числу. Заметим, что при таких операциях каждый раз последняя единица сдвигается как минимум на 1 позицию ближе к старшему разряду – значит, операции прибавления 1 могут произойти не более $m-1$ раз (из них одна – уже учтенная операция с увеличением числа разрядов). Таким образом, максимальное количество операций для числа из $m$ разрядов не превосходит $(m-2) + 1 + m = 2m - 1$.
Число 999999 имеет в своей двоичной записи 20 цифр, поскольку $2^{19} < 999999 < 2^{20} = 1048576$. Значит, запись $a_1$ состоит не более чем из 20 цифр, и длина последовательности не превосходит $2 \cdot 20 - 1 = 39$. Нетрудно убедиться в том, что $a_1 = 2^{19} + 1 = 524289$ дает пример последовательности длины 39.

***Задача 4.*** Пусть точка $O$ – центр многоугольника $A_1A_2A_3 \ldots A_{2020}A_{2021}$. Проведем отрезки $OA_1, OA_2, \ldots, OA_{2021}$ – они поделят многоугольник на равные друг другу равнобедренные треугольники, угол при вершинах которых равен $\alpha = 360^\circ/2021$ .
Заметим, что при повороте многоугольника вокруг точки $O$ на угол $4\alpha$ прямая $A_1B$ перейдет в $A_{2018}C$ – значит, угол между этими прямыми равен $4\alpha = 4 \cdot 360^\circ/2021 \approx 0.71^\circ$.

***Задача 5.*** Очевидно, $26^{47} < 27^{47} = 3^{141}$ и $11^{71} > 9^{71} = 3^{142}$. Имеем $26^{47} < 3^{141} < 3^{142} < 11^{71}$, что дает $26^{47} < 11^{71}$.
*Распространенная ошибка при решении подобных задач может возникнуть при округлении – важно понимать, в какую сторону оно происходит: например, при сравнении чисел $11^6$ и 999999 можно воспользоваться транзитивностью неравенств, поскольку $11^6 > 10^6 > 999999$, т.е. мы*

*уменьшили большее число. Если же мы, к примеру, уменьшаем меньшее число, то получаемый вывод не приводит к верному ответу. Если мы не знаем, в какую сторону округлили, то полученные выводы тем более бесполезны.*

***Задача 6.*** Рассмотрим последние три цифры в записи чисел $5^n$:

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5^n$ (mod 1000) | 005 | 025 | 125 | 625 | 125 | 625 | 125 |

$125 \cdot 5 = 625$, $625 \cdot 5 = 3125 \equiv 125 \pmod{1000}$ – значит, при $n > 2$: $5^n \equiv 125 \pmod{1000}$ для нечетных $n$ и $5^n \equiv 625 \pmod{1000}$ для четных $n$.
Отсюда следует, что цифра в разряде сотен зависит только от четности показателя степени «пятерки». Число $4^m$ четно при любом натуральном $m$ – значит, $5^{4^m}$ (в частности, при $m = 3^{2^7}$, как в условии задачи) оканчивается на 625, следовательно, цифра в разряде сотен – это 6.
*Обратите внимание, что* $a^{b^c} \neq (a^b)^c = a^{bc}$. *Скорее* $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

**8–9 класс**

***Задача 1.*** Пусть $O$ – точка пересечения диагоналей прямоугольника. Тогда $BO = AO = AP + PO = AP + PQ/2 = 5$.
По теореме Пифагора для $\triangle BPO$ имеем $BP = \sqrt{BO^2 - PO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Тогда площадь $\triangle ABC$ равна $AC \cdot BP/2 = 20$ и площадь $ABCD$ равна 40.

***Задача 2.*** Заметим, что $20339 = 11 \cdot 43^2$, где 11 и 43 – простые числа. Исходное равенство преобразуется к виду $\sqrt{x} = \sqrt{20339} - \sqrt{y} \Rightarrow x = y + 20339 - 2\sqrt{20339y} \Rightarrow \sqrt{4 \cdot 20339y} \in Z$. Значит, $y = 11 \cdot d^2$ для некоторого целого $d$, не превосходящего 43. Каждому такому $y$ соответствует единственное $x = 11 \cdot (43 - d)^2$ – значит, общее количество решений – это количество целых неотрицательных $d \leq 43$, отсюда количество решений равно 44.

***Задача 3.*** Будем называть одну из сторон сетки «нижней» (противоположную – верхней), одну из смежных к ней сторон – «левой» (противоположную – правой). Каждый прямоугольник на линиях сетки однозначно задается своими левой нижней ($A$) и правой верхней ($B$) вершинами. Введем систему координат, в которой ось $OX$ совпадает с нижней стороной сетки, а ось $OY$ – с левой стороной сетки.
Пусть точка $A$ имеет координаты $(x, y)$, где $x, y$ – натуральные числа от 1 до $N$. Тогда есть $(N - x)(N - y)$ способов выбрать его вершину $B$. Значит, количество прямоугольников на линиях сетки равно $\sum_{x=1}^{N}\sum_{y=1}^{N}(N - x)(N - y) = \sum_{y=1}^{N}(N - x)\sum_{y=1}^{N}(N - y) = ((N - 1) + (N - 2) + \cdots + (N - N))^2 = N^2(N + 1)^2/4$ – возрастающая функция от $N$.

Известно, что $N^2(N+1)^2/4 \geq 11025 \Rightarrow N(N+1)/2 \geq 105 \Rightarrow N \geq 14$. Значит, наименьшее значение $N$ равно 14.

***Задача 4.*** Последние 4 цифры числа – это его остаток при делении на $10^4 = 2^4 \cdot 5^4$. Очевидно, при целых $n \geq 0$ остаток при делении $5^{5^{5^n}}$ на $5^4$ равен 0, поскольку $5^{5^n} > 4$. Найдем остаток при делении $5^{5^{5^n}}$ на $2^4$: согласно теореме Эйлера, $5^{5^{5^n}} \equiv 5 \pmod{2^4}$, поскольку $5^{5^n} \equiv c \pmod{\varphi(2^4)}$, где $\varphi(2^4) = 8$ – функция Эйлера, а $c = 1$ при нечетных $n$ и $c = 5$ при четных $n$.
Согласно китайской теореме об остатках, существует единственное $d$, такое, что если $5^{5^{5^n}} \equiv 5 \pmod{2^4}$ и $5^{5^{5^n}} \equiv 0 \pmod{5^4}$, то $5^{5^{5^n}} \equiv d \pmod{2^4 \cdot 5^4}$. Нетрудно видеть, что $d = 3125$ подходит: оно делится на $5^4$ и дает остаток 5 при делении на $2^4$. Значит, $5^{5^{5^n}}$ оканчивается на 3125 при любом натуральном $n$. Далее: $3125 \cdot 11 \equiv 4375 \pmod{10^4}$.

***Задача 5.*** Поскольку функция $f(t)$ определена для всех $t \in \mathrm{R}$, подставим в равенство в условии $x = 0$: $f(-y) - f(y) = 0$ для любого $y \in \mathrm{R}$, т. е. функция $f$ – чётная.
Значит, $2x^4 f(y) = 2x^4 f(-y)$ для произвольных $x, y$, откуда $f(x^2 - y) - f(x^2 + y) = f(x^2 - (-y)) - f(x^2 + (-y)) \Rightarrow f(x^2 - y) = f(x^2 + y) \Rightarrow 2x^4 f(y) = 0$ для любых вещественных $x, y$. Отсюда $f(t) = 0$ для всех $t \in \mathrm{R}$.

***Задача 6.*** Введем обозначение: $y = x+2$. Получим систему уравнений, равносильную исходному уравнению:

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{y^3} = 88 \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение системы: $\frac{y^3 - x^3}{x^3y^3} = 88 \Rightarrow (y - x)(y^2 + xy + x^2) = 88(xy)^3 \Rightarrow (y - x)((y - x)^2 + 3xy) = 88(xy)^3$. Используя $y - x = 2$ и обозначая $t = xy$, получим $88t^3 - 6t - 8 = 0 \Rightarrow 44t^3 - 3t - 4 = 0$. Один из корней этого уравнения: $t = 1/2$ . При делении $44t^3 - 3t - 4$ на $t - 1/2$ получим квадратный трехчлен $44t^2 + 22t + 8$, дискриминант которого отрицателен.
Итак, $\begin{cases} y - x = 2 \\ xy = 1/2 \end{cases}$, откуда $x = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$.

## 10–11 класс

***Задача 1.*** Пчела должна проползти по грани $ABCDEF$, по боковой поверхности призмы и по грани $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – именно в таком порядке. Действительно, если пчела покинула грань $ABCDEF$ в точке $P$, а потом вернулась в эту грань через точку $Q$, то она проделала не кратчайший путь: кратчайший путь между точками выпуклого $ABCDEF$ тоже лежит в $ABCDEF$. Аналогично с

$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

Рассматривая развертки призмы, убедимся в том, что кратчайший путь пчелы между точками $X$ и $Y$ не выходит за пределы поверхности призмы $ABCOA_1B_1C_1O_1$ – значит, проходит по грани $ABB_1A_1$ или по грани $BCC_1B_1$. Рассмотрев развертки $ABCOA_1B_1C_1O_1$ с путями пчелы по упомянутым граням, убедимся в равенстве длин путей пчелы. Вычислим длину пути, считая длину стороны шестиугольника равной $a = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$, высоту призмы равной $h = \sqrt{7}$. Тогда $XY = \sqrt{(\frac{3}{4}a)^2 + (h + \frac{3\sqrt{3}}{4}a)^2} = 7$.

***Задача 2.*** Пусть $\sqrt{n} + \sqrt{n + 2021} = m \in Z$. Далее $\sqrt{n + 2021} = m - \sqrt{n} \Rightarrow m^2 - 2021 = 2m\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{m^2-2021}{2m} = (m - \frac{2021}{m})/2$.

Последнее выражение должно принимать целое неотрицательное значение – значит, $m$ – делитель числа $2021 = 43 \cdot 47$. Очевидно, наибольшее $n$ достигается при $m = 2021 : n = (2021-1)^2/4 = 1020100$.

***Задача 3.*** См. решение задачи №3 для 8–9 кл.

***Задача 4.*** См. решение задачи №4 для 8–9 кл.

***Задача 5.*** Введем обозначение: $t = \sqrt[126]{x} > 1$. Уравнение примет вид

$t^{63} + t^{14} = t^{42} + t^{18} \Rightarrow t^{49} + 1 = t^{28} + t^4 \Rightarrow t^{49} - t^4 = t^{28} - 1 \Rightarrow t^4\,(t^{45} - 1) = t^{28} - 1$

Поскольку $t > 1$, имеем $t^4 > 1$ и $t^{45} > t^{28} \Rightarrow t^{45} - 1 > t^{28} - 1$ – значит, равенство $t^4\,(t^{45} - 1) = t^{28} - 1$ невозможно для $t > 1$ и исходное уравнение не имеет корней.

*Во многих решениях этой задачи участники олимпиады ссылались на скорость роста функций, представленных левой и правой частями равенства. Распространенным было утверждение «функция в левой части равенства растет быстрее» (оно нуждается в доказательстве) и далее «поэтому функции имеют не более одной общей точки» (это тоже нуждается в доказательстве). Если подобное утверждение не доказано, то решение является неполным.*

***Задача 6.*** Для удобства будем считать одну из сторон игровой доски горизонтальной, а не примыкающую к ней вершину – лежащей выше этой стороны. Докажем, что у Анны есть выигрышная стратегия. Первым ходом Анна должна поставить фишку в игровое поле, наиболее удаленное от горизонтальной стороны доски. После каждого хода Бориса она будет делать ход «левее». Докажем, что при такой стратегии у Анны всегда будет ход. Тогда, очевидно, она выиграет, поскольку количество ходов в игре конечно.

Отрежем линией, параллельной «левой» стороне доски, слой «толщиной» в один равносторонний треугольник со стороной 1. В этом слое будет 39 маленьких треугольников, включая самый удаленный от горизонтальной стороны доски. Разобьем все эти треугольники (кроме верхнего) на пары смежных по стороне и образующих ромб со стороной 1 и углами 60° и 120°. Первым своим ходом Борис зайдет в первый ромб, после чего Анна зайдет во второй треугольник этого ромба. После этого у Бориса будет лишь один вариант – войти в следующий ромб, после чего Анна зайдет во второй треугольник этого ромба, и т. д. Своим последним ходом Анна зайдет в нижний левый треугольник доски, откуда у Бориса не будет хода, и он проиграет.

## Задания финального тура

### 7 класс

***Задача 1.*** Пусть $n$ – количество людей в зале, $a$ – количество честных людей, $b$ – количество хитрецов. Секретарь получит $n$ листов, среди которых $a$ будут содержать число $a$ (написаны честными людьми); $b$ листов содержат число $n–a–b$; $n–a–b$ листов содержат число $n - a$. Если $b = 0$, то секретарь получит $a$ листов с числом $a$ и $n - a$ листов с числом $n - a$, и не сможет отличить честных людей от жуликов, если $a \neq n - a$. Значит, если $b = 0$ и $n \neq 2a$, то секретарь не сможет определить количество честных людей.
Пусть теперь $b > 0$. Заметим, что число, которое пишет честный, всегда равно количеству честных людей, а число, которое пишет жулик, больше количества жуликов: $n - a > n - a - b$ при $b > 0$. Значит, секретарь сможет определить количество честных людей, если количество хитрецов не равно количеству жуликов, т.е. $b \neq n - a - b$. Если же $b = n - a - b$, то секретарь сможет отличить ответ жулика от остальных: он знает количество жуликов $n - a - b$ и среди чисел, написанных не-жуликами, ищет $n - a - b$.
Если ответы не-жуликов различаются, то те, кто написал $n - a - b$ – хитрецы: значит, секретарь найдет количество честных людей. Если же ответы не-жуликов одинаковые, то $a = n - a - b$, что вкупе с $b = n - a - b$ дает $a = b = n/3$ . В этом случае секретарь может однозначно утверждать, что количество честных людей равно $n/3$ .
Ответ: секретарь не сможет определить количество четных горожан, если в зале нет хитрецов, а количество жуликов не равно количеству честных людей.

***Задача 2.*** Последовательно занумеруем вершины правильного 100-угольника целыми числами от 0 до 99. Тогда если $k$, $l$, $m$, $n$ – номера вершин 100-угольника, то отрезки $kl$ и $mn$ параллельны тогда и только тогда, когда $k + l \equiv m + n \pmod{100}$.
Предположим, что в нашей ломаной нет параллельных звеньев. Пройдем по ней, складывая числа на каждом ребре. С одной стороны, мы получим сумму $2\cdot(0+1+2+\cdot\cdot\cdot+99) = 9900 \equiv 0 \pmod{100}$. С другой стороны, сумма чисел на каждом отрезке ломаной должна давать свой остаток по модулю 100, поэтому

та же сумма равна $0 + 1 + \cdot \cdot \cdot + 99 \equiv 50 \pmod{100}$ — получили противоречие. Значит, наше предположение было неверно, и в ломаной обязательно найдутся два параллельных звена.

***Задача 3.*** Понятно, что номиналы имеющихся монет – кубы целых чисел от 1 до 8, и нам нужно исследовать делимость таких кубов на 9:

| Номер монеты (длина ребра кубика) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Номинал (в джанах) | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 |
| Остаток от деления номинала на 9 | 1 | 8 | 0 | 1 | 8 | 0 | 1 | 8 |

Таким образом, остаток при делении куба натурального числа на 9 может быть равен только 0, 1 или 8, т.е. сдача с одной монеты, если товар стоит целое число раману, может быть только $9n$, $9n + 1$ или $9n + 8$ джанов, где $n$ – целое число. Согласно условию задачи, в операции участвовали три монеты, т.е. требуется найти остатки от деления суммы трех кубов целых чисел на 9. 0 + 0 + 0 = 0; 1 + 0 + 0 = 1; 1 + 1 + 0 = 2; 1 + 1 + 1 = 3; 8 + 8 + 8 = 24 (дает остаток 6 при делении на 9); 8 + 8 + 0 = 16 (дает остаток 7 при делении на 9); 8 + 0 + 0 = 8. Перебором остальных вариантов убеждаемся, что сумма трех кубов не может дать остатки 4 и 5 при делении на 9.
Теперь найдем минимальную стоимость товара, если сдача составила 1 джан. Тогда стоимость трех монет при делении на 9 дает остаток 1, а это возможно в двух случаях: 1) есть две монеты достоинством в целое число раману, а стоимость третьей дает остаток 1 при делении на 9 (тогда минимальная стоимость товара равна 27+27+64-1=117 джан = 13 раману); 2) стоимости двух монет дают остаток 1 при делении на 9, а стоимость третьей – остаток 8 (тогда их минимальная стоимость равна 8 + 64 + 64 − 1 = 135 джан= 15 раману).
Как видим, наименьшая стоимость равна 13 раману.

***Задача 4.*** Отметим точку $R$ на луче $AM$ так, что $AR = 2 \cdot MR$, тогда четырехугольник $APRB$ – параллелограмм. $\angle FAB + \angle BAP + \angle PAQ + \angle QAF = 360^\circ$, $\angle FAB = 120^\circ$, $\angle PAQ = 60^\circ$, поэтому $\angle BAP + \angle QAF = 180^\circ$. С другой стороны, $\angle BAP + \angle RBA = 180^\circ$ (т. к. $BR \parallel AP$), поэтому $\angle RBA = \angle QAF$, следовательно, треугольники $RBA$ и $FAQ$ равны по двум сторонам и углу между ними. Обозначим за $T$ точку пересечения прямых $AM$ и $QF$, тогда $\angle ATQ = \angle AFQ + \angle TAF = \angle BAR + \angle TAF = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

***Задача 5.*** При необходимости разделив $a$, $b$, $n$ на $(a, b)$, можно считать, что $(a, b) = 1$. Заметим, что если $n$ не делится на $(a, b)$, то подняться с нулевой ступеньки на верхнюю невозможно, поскольку после каждого шага математик будет стоять на ступеньке, номер которой кратен $(a, b)$.
Сначала докажем, что $n \geq a + b - 1$. Пусть математик сумел подняться на верхнюю ступеньку и вернуться на землю, тогда найдется ступенька, в

которой он побывал дважды (в частности, ступенька с номером 0), т.е. сделал цикл. Выберем среди всех таких ступенек ту, в цикле которой нет других циклов, т. е. по дороге в эту же ступеньку все остальные ступеньки пройдены не более чем по одному разу. Далее рассмотрим этот маршрут.

Если на этом маршруте математик сделал $k$ шагов вверх (каждый – на $a$ ступенек) и $l$ шагов вниз (каждый – на $b$ ступенек), то $ka = lb$, поскольку он вернулся на прежнее место. Но $(a, b) = 1$, поэтому $k \geq b$, $l \geq a$ – значит, было совершено $k + l \geq a + b$ шагов. С другой стороны, количество шагов не больше общего числа ступенек (считая нулевую), поскольку на каждую из них математик наступили не более одного раза. Значит, $n + 1 \geq k + l \geq a + b$, откуда $n \geq a + b - 1$.

Теперь докажем, что при $n = a + b - 1$ можно подняться на верхнюю ступеньку и вернуться на землю. Заметим, что на какой бы ступеньке математик ни стоял, у него всегда есть возможность сделать шаг (например, со ступеньки с номером от 0 до $b{-}1$ – вверх на $a$ ступенек, а со ступеньки с номером от $b$ до $a + b - 1$ – вниз на $b$ ступенек).

Рассмотрим диофантово уравнение $ax - by = 1$. Поскольку $(a, b) = 1$, у этого уравнения есть решение $(x_0, y_0)$, где $0 \leq x_0 \leq b - 1$, $0 \leq y_0 \leq a - 1$.

Вот как должен идти математик: сначала вверх на $x_0$ шагов, либо пока не сможет идти дальше. После этого вниз на $y_0$ шагов, либо пока не сможет идти дальше, и т. д., пока не сделает совокупно $x_0$ шагов вверх и $y_0$ шагов вниз – так он сдвинется на одну ступеньку вверх. Продолжая так действовать, он поднимется на верхнюю ступеньку.

Чтобы спуститься, возьмем уравнение $bu - av = 1$ и аналогично воспользуемся его решением для построения маршрута обратно к нулевой ступеньке.

## 8–9 класс

***Задача 1.*** Количество пар клубов равно $50 \cdot 49/2 = 25 \cdot 49 = 1225$. Это минимальное количество киберспортсменов, которые могут жить в городе, т. к. спортсмен, посещающий одну пару клубов, уже не может посещать другую, иначе он посещает не менее 3-х клубов, что противоречит условию. Помимо этих игроков могут быть и те, которые посещают только один клуб, и в каждом клубе таких может быть не более 6-и (т. к. 49 киберспортсменов уже посещают этот клуб в паре с каким-то еще). При этом любое количество от 0 до 6 таких игроков для любого из клубов возможно. Таким образом, в этом городе может быть любое количество киберспортсменов от 1225 до $1225 + 50 \cdot 6 = 1525$.

***Задача 2.*** Пусть точка $Q' \neq A$ – пересечение окружности, описанной около треугольника $BPA$, с прямой $AC$; точка $N$ – середина отрезка $PQ'$. Докажем, что точки $Q$ и $Q'$ совпадают.

Треугольники $BCA$ и $Q'CP$ подобны (именно в таком порядке вершин), поэтому их медианы $CM$ и $CN$ образуют равные углы с соответствующими сторонами треугольников, следовательно, $\angle PCN = \angle ACM$, откуда заключаем, что точки $C$, $N$, $K$ лежат на одной прямой. Треугольники $PNK$ и $Q'NC$ равны, поэтому четырехугольник $PCQ'K$ – параллелограмм, поэтому $Q' = Q$ и четырехугольник $BPQA$ – вписанный, что и требовалось доказать.

***Задача 3.*** Подставив в исходное уравнение $\frac{1}{1-x}$ вместо $x$, получим для $f(x)$ и всех $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ равенство $f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-x}$. Подставляя в последнее равенство $\frac{1}{1-x}$ вместо $x$, получим равенство $f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{x-1}{x}$, определенное для тех же $x$. Итак, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) + f\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{1-x} \\ f\left(\dfrac{1}{1-x}\right) + f\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = \dfrac{1}{1-x} \\ f\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + f(x) = \dfrac{x-1}{x} \end{cases}$$

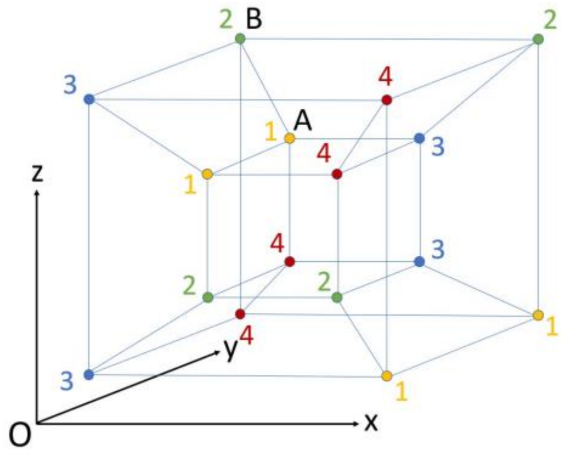
Сложив первое равенство с третьим, затем вычтя второе и разделив полученное равенство на 2, получим $f(x) = \frac{x^3-x+1}{2(x^2-x)}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что найденная функция удовлетворяет исходному равенству.

***Задача 4.*** Опишем один из алгоритмов, согласно которому должны действовать математики, чтобы спастись.

Предварительно (в ночь перед угадыванием сундука) математики договариваются о том, в каком порядке нумеровать сундуки (например, по часовой стрелке, начиная от сундука в ближнем левом углу зала), т. е. устанавливают взаимооднозначное соответствие между сундуками и числами 1,2,3,4.

На следующий день первый математик, узнавший, в каком сундуке ключ, и видящий все числа на сундуках, берет их остатки при делении на 2. Он должен увеличить одно из чисел, написанных на сундуках, на единицу (тем самым изменив его остаток при делении на 2: 0 на 1 , а 1 – на 0), а второй математик по четности четырех чисел на сундуках должен определить, в каком сундуке ключ.

Далее будем вместо четных чисел писать 0, а вместо нечетных – 1; всего существует 16 четверок $(x, y, z, t)$, где $x, y, z, t \in \{0; 1\}$. Каждой четверке целых чисел, написанных на сундуках, соответствует одна из упомянутых 16-и четверок $(x, y, z, t)$, причем после прибавления единицы к одному из чисел на сундуках мы получаем другую четверку. Изобразим эти четверки в виде вершин четырехмерного куба, переход по любому ребру которого соответствует прибавлению единицы к одному из чисел на сундуках (переход по первой координате соответствует движению по ребру, параллельному оси $Ox$, по второй координате – $Oy$, по третьей – $Oz$, по четвертой – переход между «внешним» и «внутренним» кубами) – см. рисунок.




Каждой вершине куба соответствует число от 1 до 4 – номер сундука, который таким образом узнает второй математик, что позволит обоим спастись. Заметим, что из любой вершины можно пройти по одному из ребер так, чтобы оказаться в вершине с любым числом от 1 до 4, что позволяет первому математику «зашифровать» номер любого сундука.

Вот пример того, как это может произойти: пусть султан написал на сундуках числа -120, 43, 9779, -630081. Первый математик берет остатки при делении этих чисел на 2 и получает четверку (0, 1, 1, 1), которая соответствует вершине $A$ гиперкуба (см. рис.). Далее султан кладет ключ в один из этих сундуков – например, во 2-й. Тогда первый математик «проходит» по ребру $AB$ куба, т.е. прибавляет единицу к числу $-630081$ (соответствующего переходу по 4-й координате, поскольку вершине $B$ соответствует четверка (0, 1, 1, 0), отличающаяся от $A(0, 1, 1, 1)$ только 4-й координатой). После этого второй математик видит числа -120, 43, 9779, -630080, которым соответствует четверка (0, 1, 1, 0), которой соответствует вершина $B$, которой, в свою очередь, соответствует число 2 (о соответствии номеров сундуков и вершин гиперкуба математики тоже договариваются заранее). Так второй математик понимает, что ключ находится во 2-м сундуке, и указывает на него.

***Задача 5.*** Заметим, что числа $x_1, x_2, x_3, x_4$ являются корнями многочлена $f(x) = (x^2 - a)^2 - b - x$. Перепишем этот многочлен в виде $f(x) = x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - b$. Если $x_1 = 0$, то $x_2, x_3, x_4$ – корни многочлена $f_1(x) = f(x)/x = x^3 - 2ax - 1$, и по теореме Виета имеем

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = x_2x_3x_4 = 1$$

Если же $x1 \neq 0$, то $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = \frac{(x_1 + x_1)(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)}{x_1 + x_1} = \frac{f(-x_1)}{2x_1} = \frac{f(x_1) + 2x_1}{2x_1} = 1.$

Итак, в обоих случаях $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = 1$.

**10–11 класс**

***Задача 1.*** Пусть $n_k$ – количество марсиан, у которых $k$ глаз ($k$ = 1, 2, 3). Такой марсианин каждую секунду отдыхает с вероятностью $1 - 0.5^k$, поскольку события «марсианин отдыхает» и «все глаза марсианина открыты» образуют полную группу событий, поэтому сумма их вероятностей равна 1. Сначала рассмотрим случай, когда $n_2 \neq 0$.
Тогда вероятность того, что наугад выбранный марсианин, у которого не больше двух глаз, отдыхает, равна $\frac{2}{3} = \frac{(1-0.5)n_1+(1-0.5^2)n_2}{n_1+n_2} = 1 - 0.5 \cdot \frac{n_1+0.5n_2}{n_1+n_2}$. Аналогичная вероятность для марсиан, у которых не меньше двух глаз, равна $0{,}8 = \frac{(1-0.5^2)n_2+(1-0.5^3)n_3}{n_2+n_3} = 1 - 0{,}25 \cdot \frac{n_2+0.5n_3}{n_2+n_3}$. Разделим числители и знаменатели полученных дробей на $n2 \neq 0$ и обозначим $x = \frac{n_1}{n_2}, y = \frac{n_3}{n_2}$ (тогда искомое отношение $\frac{n_2}{n_1+n_2+n_3}$ преобразуется к виду $\frac{1}{x+y+1}$).
Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 0{,}5x + 0{,}25 = (x+1)/3 \\ 0{,}125y + 0{,}25 = 0{,}2(y+1) \end{cases}$$

откуда $x$ = 0.5, $y$ = 2/3 и $\frac{1}{x+y+1}$ = 6/13.
Теперь рассмотрим случай, когда $n_2$ = 0. Тогда доля отдыхающих марсиан среди тех, у кого не больше двух глаз, должна быть равна доле отдыхающих одноглазых марсиан, т. е. 0.5. Однако, согласно условию, эта доля равна 2/3 ≠ 0.5 – получили противоречие, значит, $n2 \neq 0$.
Ответ: 6/13.

***Задача 2.*** Пусть $f(n)$ – искомое число помещении в зависимости от количества $n$ участников турнира. Сначала докажем индукцией по $\lceil \log_2 n \rceil$, что $f(n) \geq \lceil \log_2 n \rceil$ (здесь $\lceil x \rceil$ – функция взятия целой части числа с округлением «вверх»). База (для $n$ = 3 и $n$ = 4) очевидна.
Зафиксируем помещение (например, №1) и обозначим через $U_1$ множество шахматистов (вершин графа, каждое ребро которого соответствует определенной партии), которые играли в этом помещении белыми фигурами. Аналогично, обозначим за $U_2$ множество шахматистов, которые НЕ играли в этом помещении белыми фигурами. Множества $U_1$ и $U_2$ не пересекаются – значит, хотя бы одно из них (без ограничения общности будем считать, что это $U_1$) содержит не более $n$/2 элементов, остальные шахматисты (их не менее $n$/2) не играли белыми фигурами в помещении №1 – значит, им для этого хватило $f(n) - 1$ помещений: $f(n) - 1 \geq f(\lceil n/2 \rceil) \geq \lceil \log_2 (\lceil n/2 \rceil) \rceil$, откуда $f(n) \geq \lceil \log_2 n \rceil$.
Покажем, как сделать «правильное» (т. е. соответствующее условию задачи) расписание с $f(n) = \lceil \log_2 n \rceil$. Для этого занумеруем вершины графа (т.е. шахматистов) числами от 0 до $n - 1$ и ориентируем ребра графа (т.е. партии) $ij$, если $i > j$ (шахматист $i$ играет белыми, а $j$ – черными), а помещения занумеруем числами от 0 до $\lceil \log_2 n \rceil$. Ребру $ij$ поставим в соответствие номер

$k$, который определяется как наибольшее $k$, такое, что в двоичной записи числа $i$ на -м месте стоит 1, а у числа $j$ – 0. Такое $k$ существует, поскольку $i \neq j$. Кроме того, в двоичных разложениях $i$, $j$ не более $\lceil \log_2 n \rceil$ цифр, откуда $k \leq \lceil \log_2 n \rceil$. Осталось проверить, что ребрам $ij$ и $jl$ соответствуют разные номера. Действительно, если бы им соответствовал общий номер $k$, то у числа $j$ в -м разряде двоичной записи стояла бы и цифра 0 (из-за ребра $ij$), и цифра 1 (из-за ребра $jl$), что невозможно.

***Задача 3.*** Заметим, что если в куче нечетное число камней, то первый игрок гарантирует себе победу, взяв на первом ходу 1 камень: тогда каждым следующим ходом игроки будут забирать по одному камню, и последний камень заберет первый игрок. Когда $n$ чётно, тот, кто первым сделает нечетный шаг, проиграет: такой шаг был сделан из четного числа – значит, он не будет последним, а противник заберет один камень, что и обеспечит ему победу.

Если $n = 2$, то второй игрок, очевидно, побеждает.

Если $n = 3$, то побеждает первый игрок, забирая первым ходом 1 камень.

Если $n = 4$, то побеждает второй игрок: если первый берет 1 камень, то второй возьмет последний камень, а если первый игрок первым ходом берет 2 или 3 камня, то второй игрок первым своим ходом забирает остальные камни.

Докажем по индукции, что для всех четных $n$ от $2^{k-1} + 1$ до $2^k - 1$ (для натурального $k \geq 2$) побеждает первый игрок, а для $n = 2^k$ – второй. База индукции ($k = 2$) разобрана выше. Пусть $2^{k-1} + 1 \leq n \leq 2^k - 1$ для натурального $k \geq 3$. Тогда первый игрок сводит игру к таковой с $n/2$ камнями (т.е. берет вдвое больше камней, чем взял бы в игре с $n/2$ камнями), где у него есть победная стратегия согласно предположению индукции, поскольку $2^{k-2} + 1 \leq n/2 \leq 2^{k-1} - 1$. Единственный способ помешать ему – взять нечетное число камней, но, как показано выше, тот, кто первым возьмет нечетное число камней, проигрывает.

Пусть теперь $n = 2^k$ для $k \geq 3$. Тогда уже второй игрок применяет стратегию «половинчатой» игры, т. е. берет в 2 раза больше камней, чем взял бы в игре с $n/2$ камнями. Согласно предположению индукции, это обеспечит ему победу.

Ответ: при $n = 2^k$ (для $k \in \mathrm{N}$) второй игрок может гарантировать себе победу. При прочих $n > 1$ выигрышная стратегия есть у первого игрока.

***Задача 4.*** Сначала рассмотрим последовательность $\{x_{3n+1}\}$. По ее определению имеем $x_{3n+1} = a \cdot b^n$ для всех целых $n \geq 0$ – значит, при $b = 1$ ее стабильное значение равно $a$, а при $b > 1$ она не стабилизируется.

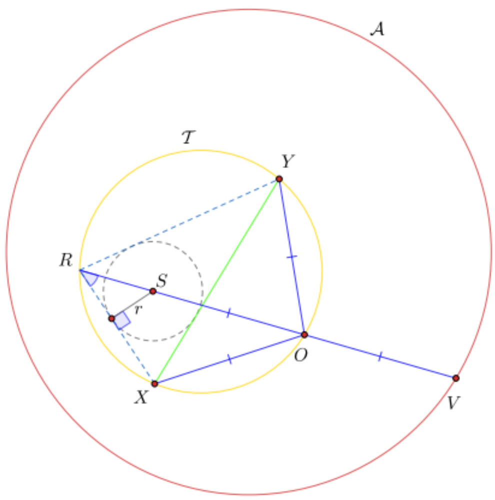
Теперь рассмотрим $\{x_{3n+2}\}$. По определению, если $b = 1$, то $x_{3n+2} = a$ для всех целых $n \geq 0$, а если $b > 1$, то $x_{3n+2} \leq a/b^n$ и, поскольку последовательность – целочисленная, имеем $x_{3n+2} = 0$ для всех $n$, начиная с $\lceil \log_b a \rceil$ (целая часть от логарифма, взятая с избытком).

Докажем по индукции, что $x_{3n+1} \cdot x_{3n+2} + x_{3n+3} = a^2 + a$ для всех целых $n \geq 0$. База индукции ($n = 0$): $x_1 \cdot x_2 + x_3 = a^2 + a$ по определению. Индукционная гипотеза: пусть для некоторого $m \geq 0$ выполнено $x_{3m+1} \cdot x_{3m+2} + x_{3m+3} = a^2 + a$. Тогда $x_{3(m+1)+1} \cdot x_{3(m+1)+2} + x_{3(m+1)+3} = (b \cdot x_{3m+1}) \cdot (x_{3m+2} \circ b) + (\, x_{3m+3} + x_{3m+1}(x_{3m+2} \ (\mathrm{mod}\ b))) = (\,(b \cdot x_{3m+1}) \cdot (x_{3m+2} \circ b) + x_{3m+1}(x_{3m+2} \ (\mathrm{mod}\ b))) + x_{3m+3} = x_{3m+1} \cdot x_{3m+2} + x_{3m+3} = a^2 + a$, что и требовалось доказать.

Наконец, рассмотрим последовательность $\{x_{3n}\}$. В силу доказанного выше, если $b = 1$, то все члены последовательности $\{x_{3n}\}$ равны $a$, а если $b > 1$, то $x_{3n+3} = x_{3n+1} \cdot 0 + x_{3n+3} = x_{3n+1} \cdot x_{3n+2} + x_{3n+3} = a^2 + a$, начиная с $n = [\log_b a]$, следовательно, стабильное значение последовательности $\{x_{3n}\}$ равно $a^2 + a$.

Ответ. Последовательность $\{x_{3n+1}\}$ стабилизируется на $a$ при $b = 1$; $\{x_{3n+2}\}$ стабилизируется на $a$ при $b = 1$ и на 0 при $b > 1$; $\{x_{3n}\}$ стабилизируется на $a$ при $b = 1$, начиная с $n = 1$, и на $a^2$+$a$ при $b > 1$, начиная с $n = [\log_b a]$.

***Задача 5.*** Обозначим за $O$, $V$, $X$ и $Y$ Олега, Оливера и двух помощников соответственно, за $S$ – центр положительной гомотетии окружностей $\mathcal{T}$ и $\mathcal{A}$. Из условия следует, что прямая $V\,O$ всегда проходит через $S$, причем, так как радиусы окружностей отличаются в два раза, отрезок $SV$ делится точкой $O$ пополам. Отметим точку $R \neq O$ – пересечение луча $OS$ с $\mathcal{T}$. Поскольку равные хорды стягивают равные меньшие дуги, точка $O$ — середина дуги $XOY$, то есть прямая $RO$ содержит внутреннюю биссектрису треугольника $XRY$, а еще $OS = OV = OX = OY$. По лемме о трезубце это означает, что точка $S$ является центром вписанной окружности треугольника $XRY$ (обозначим эту окружность за $\omega$).




Покажем, что $\omega$ является искомой окружностью. Она касается отрезка $XY$ в силу построения, поэтому достаточно проверить, что она не зависит от времени. Как показано выше, центр $\omega$ – это $S$, обозначим ее радиус за $r$. Также обозначим за $d$ расстояние между центрами $\omega$ и $\mathcal{T}$, а за $R$ – постоянный радиус $\mathcal{T}$.

Посчитаем степень точки $S$ относительно $\mathcal{T}$ двумя способами: $d^2 - r^2 = -RO \cdot SO = -RO \cdot OX = -RO \cdot 2R \sin \angle XRO = -2Rr$. Величины $d$ и $R$ не зависят от времени, поэтому $r$ также от него не зависит, следовательно, окружность $\omega$ имеет постоянный центр и радиус, что и требовалось доказать.

# ЗАДАНИЯ 2022–2023 УЧЕБНОГО ГОДА

## Задания 1-го отборочного тура

### 7 класс

***Задача 1 (рекуррентные последовательности, текстовые задачи).*** Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа $A_n$ уже построено, то попробуем представить следующее число $(n + 1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: его элементы – это все элементы $A_n$ и, кроме того, множество, состоящее из всех элементов $A_n$.
Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:
$A_0 = \emptyset$;
$A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
$A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.
Сколько элементов содержит множество $A_{24}$?

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 2 (текстовые задачи).*** Зубной врач запретил Кате есть больше десяти конфет в день. Более того, если в какой-то день Катя съедает больше семи конфет, то в следующие два дня ей нельзя есть более пяти конфет в день. Какое максимальное количество конфет может съесть Катя за 25 дней, пока действуют ограничения врача?

*(А.А. Гаврилюк)*

***Задача 3 (числовые последовательности).*** Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает $N$ имеющихся у вас конфет в $3N + 2$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с двух конфет и успел произнести заклинание 14 раз?

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 4 (текстовые задачи).*** Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 6 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью $v$. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее $d$, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 5 (текстовые задачи).*** Для того, чтобы развести костёр, хоббитам необходимы кремень, кресало и трут. Перед походом компания из 11 юных хоббитов закупила по 6 штук кремней, кресал и коробочек с трутом и разложила их как попало по своим рюкзакам – известно лишь, что в каждый рюкзак не могло попасть более одного предмета каждого вида (кремня, кресала или трута), но по одному каждого вида – могли. Тёмной ночью хоббиты случайно разделились на 2 группы. Докажите, что хотя бы одна из групп сможет развести костёр и послать сигнал другой.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 6 (математические игры).*** Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 7×7 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

## 8–9 класс

***Задача 1 (числовые последовательности).*** Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает $N$ имеющихся у вас конфет в $3N + 2$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с двух конфет и успел произнести заклинание 14 раз?

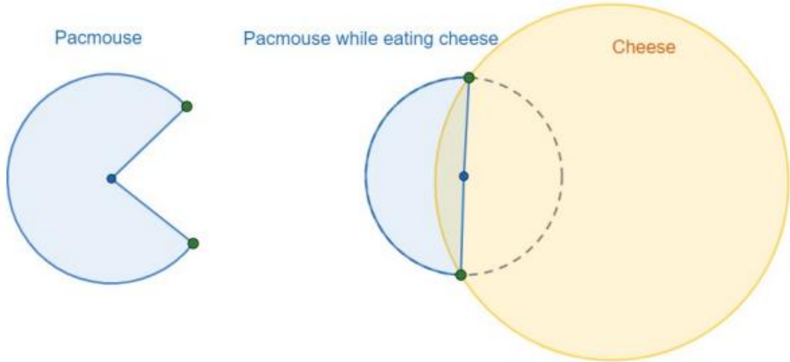
*(Н.В. Шилов)*

***Задача 2 (анализ).*** В каждую клетку таблицы 100×100 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 100, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 200, и так далее – в -ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k$, $2k$, $3k$, . . . , $100k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

***Задача 3 (планиметрия).*** Треугольник $AOB$ – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой $AB$. Точки $C$ и $D$ расположены на отрезках $AO$, $OB$ соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику $COD$, причем точки $A$, $C_1$, $D_1$ лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 12$, $CD = 7$.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 4 (планиметрия).*** Пакмыши живут на плоскости и едят круглые сыры. Форма пакмыши (см. рисунок) – круг: когда пакмышь ест, ровно половину этого круга составляют страшные зубастые челюсти. Пакмышь может откусить все, что в неё войдёт. Пакмышь всегда честная (в команде она откусывает поровну с другими пакмышами) и рациональная (откусывает самый большой из возможных кусков и знает, как это сделать). Пакмышь наелась, если откусила от сыра столько, сколько может откусить от него в одиночку. Две одинаковые пакмыши нашли круглый сыр диаметра 6 и кусают его одновременно один раз.




Найдите наименьшую возможную площадь оставшегося куска сыра, если известно, что пакмыши наелись.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 5 (математические игры).*** Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 7×7 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

***Задача 6 (рекуррентные последовательности, многочлены).*** Последовательность многочленов $P_n(x)$, где $n \geq 0$ – целое число, задана рекуррентно: $P_0(x)$ тождественно равен единице (то есть $P_0(x) \equiv 1$), и $P_{n+1}(x) = x^{7(n+1)} - P_n(x)$ для всех $n \geq 0$. Для каждого $n \geq 0$ найти все вещественные корни $P_n(x)$.

*(Н.В. Шилов)*

## 10–11 класс

***Задача 1 (планиметрия).*** Треугольник $AOB$ – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой $AB$. Точки $C$ и $D$ расположены на отрезках $AO$, $OB$ соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику $COD$, причем точки $A$, $C_1$, $D_1$ лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 12$, $CD = 7$.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 2 (текстовые задачи).*** Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 6 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью $v$. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее $d$, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 3 (анализ).*** В каждую клетку таблицы 100×100 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 100, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 200, и так далее – в -ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k,\ 2k,\ 3k,\ .\ .\ .\ ,\ 100k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

***Задача 4 (рекуррентные последовательности).*** Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.

Рон рассуждал следующим образом: ноль, естественно, представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа $A_n$ уже построено, то попробуем представить следующее число ($n + 1$) множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: его элементы – это все элементы $A_n$ и, кроме того, множество, состоящее из всех элементов $A_n$.

Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

$A_0 = \emptyset$;

$A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;

$A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Рон заметил, что множество $A_0$ записывается 1 символом, множество $A_1$ – 7 символами, множество $A_2$ – 19 символами. А сколько символов требуется для записи множества $A_7$?

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 5 (алгебраические уравнения).*** Решите для положительных вещественных $x$:

$$x^{x^5} = 100$$

*(Д.Е. Бебчук)*

***Задача 6 (графы).*** В математической лаборатории стояла большая тарелка, которую сотрудники решили превратить в арт-объект: они отметили чёрным маркером 20 точек, а затем, вооружившись цветными маркерами пяти цветов, соединили каждую пару точек линией одного из этих пяти цветов. Докажите, что на этом арт-объекте можно стереть все линии какого-то одного цвета так, чтобы от любой отмеченной точки всё ещё можно было добраться до любой другой, двигаясь вдоль оставшихся линий.

## Задания 2-го отборочного тура

### 7 класс

***Задача 1 (текстовые задачи).*** Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана. Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить достойных награды. Например, если капитан выберет 99 пиратов, то доля капитана в таком случае составит 51 монета; а если же он выберет 77 пиратов, то его доля будет уже 29 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 1000?

*(А.А. Гаврилюк)*

***Задача 2 (комбинаторика).*** Клетчатую таблицу размером $6 \times 6$ вырезали из листа бумаги и склеили у нее противоположные стороны. Какое максимально возможное количество коней можно расставить на такой доске, чтобы никакие два коня не били друг друга?

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 3 (графы).*** В стране несколько городов, некоторые пары которых соединены дорогам. Известно, что всего 2025 дорог, и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Какое максимальное количество дорог, никакие две из которых не выходят из одного города, гарантированно можно найти?

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 4 (теория чисел).*** Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^7 - n$ для любого натурального $n$.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 5 (математические игры).*** На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2022, образуя одно огромное число: 1234567891011...20212022. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычеркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

*(А.А. Гаврилюк)*

***Задача 6 (математические игры).*** Алиса и Боб играют в игру. Игровое поле представляет из себя клетчатую полоску размером $1 \times 2022$. Игроки по очереди (начинает Алиса) выписывают в пустую клетку любую из букв О и Г. Побеждает тот, после чьего хода в трех соседних клетках появятся буквы ОГО. Если все клетки заполнены, а слова ОГО нет, игра заканчивается вничью. Каков будет исход при правильной игре обоих соперников?

*(П.В. Бибиков)*

## 8–9 класс

***Задача 1 (текстовые задачи).*** Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана. Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить достойных награды. Например, если капитан выберет 99 пиратов, то доля капитана в таком случае составит 51 монета; а если же он выберет 77 пиратов, то его доля будет уже 29 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 1000?

*(А.А. Гаврилюк)*

***Задача 2 (планиметрия).*** На боковой стороне $CD$ трапеции $ABCD$ ($AD > BC$) отмечена такая точка $P$, что $PC = 2 \cdot DP$. Через эту точку проведена прямая, параллельная $AB$, которая пересекает $AD$ в точке $R$. Найдите площадь треугольника $ABR$, если площадь $ABCD$ равна 40, а $BC = RD$.

*(А.А. Гаврилюк)*

***Задача 3 (комбинаторика).*** Дана доска $6 \times 6$, раскрашенная в шахматном порядке. Сколькими способами можно поставить на белые клетки 9 шашек так, чтобы никакие две шашки не стояли бы на одной клетке, и чтобы никакие две шашки не располагались бы в клетках, соседних по углу?

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 4 (теория чисел).*** Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном $x$ разность $x^{25} - x$ кратна $n$.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 5 (математические игры).*** На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2022, образуя одно огромное число: 1234567891011...20212022. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычеркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

*(А.А. Гаврилюк)*

***Задача 6 (неравенства).*** Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 11x^2 + 8xy + 8y^2 \leq 3 \\ x - 4y \leq -3 \end{cases}$$

*(П.В. Бибиков)*

**10–11 класс**

***Задача 1 (теория чисел).*** Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном $x$ разность $x^{25} - x$ кратна $n$.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 2 (математические игры).*** Алиса и Боб играют в игру. На столе лежат $k$ листов бумаги. Сначала Алиса пишет на каждом листе набор каких-то чисел от 1 до 2022 (на разных листах числа могут повторяться; также Алиса может не написать ни одного числа на каком-то листке или написать сразу все числа). Затем Алиса пишет на обратной стороне каждого листа все оставшиеся числа от 1 до 2022 (т. е. на каждом листе записаны все числа от 1 до 2022). Затем Боб переворачивает некоторые листы другой стороной вверх (он также может не перевернуть ни одного листа или перевернуть сразу все). Боб выигрывает, если на верхних сторонах всех листов будут записаны все числа от 1 до 2022. При каком наименьшем $k$ Боб гарантированно сможет выиграть?

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 3 (оценка+пример).*** На шахматной доске $6 \times 6$ расставлены ладьи так, что они бьют все черные клетки. Какое наибольшее возможное количество непобитых белых клеток может быть?

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 4 (комбинаторика).*** Дана колода из 11 карт. Разрешается тасовать колоду следующими способами:

1) Снять любое количество карт с верха колоды и не меняя их порядка положить под низ колоды.

2) Снять 5 карт с верха колоды и не меняя их порядка положить в промежутки между оставшимися 6 картами.

Какое количество различных положений карт в колоде можно получить, выполняя эти тасовки?

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 5 (текстовые задачи, планиметрия).*** Муха села на верхнюю кромку цилиндрической кружки (без ручки) и поползла по её наружной стенке вниз под углом к вертикали и горизонтали. Оказалось, что весь свой путь до стола муха перемещалась с постоянными вертикальной и угловой скоростями (угловая скорость в данной ситуации измеряется в ортогональной проекции на поверхность стола относительно центра проекции кружки). Также оказалось, что муха совершила два полных оборота вокруг кружки и коснулась поверхности стола в точности под точкой, из которой свой путь начала. Натуралист Коля заинтересовался траекторией перемещения мухи и наклеил полосу липкой ленты ширины 2 см поверх пути мухи так, что середина полосы идёт в точности по этому пути, обрезав эту полосу вдоль верхнего и нижнего краёв кружки. Определите площадь наклеенного куска липкой ленты, если высота кружки 7 см, а радиус $4/\pi$ см.

*(А.А. Гаврилюк)*

***Задача 6 (функциональные уравнения).*** Функция $f$ называется периодической, если она принимает хотя бы два различных значения, и найдется такое $p > 0$, что $f(x + p) = f(x)$ для любого $x$. При этом каждое такое число $p$ называется периодом функции $f$. Существуют ли такие периодические функции $g$ и $h$ с периодами 1 и $\pi$ соответственно, что $g + h$ – тоже периодическая функция?

*(Н.В. Шилов)*

## Задания финального тура

### 7 класс

***Задача 1 (комбинаторика).*** Катя хочет покрасить стены своей шестиугольной комнаты в голубой, желтый, зеленый, красный, синий и оранжевый цвета (каждую стену в свой цвет), причем голубая стена должна соседствовать с желтой, а зеленая не должна соседствовать с синей. Сколько существует различных способов покрасить стены комнаты с соблюдением этих правил? Покраски, совпадающие друг с другом при повороте комнаты, считаются одинаковыми.

*(А.А. Гаврилюк)*

***Задача 2 (текстовые задачи).*** Рассмотрим следующий алгоритм. На каждом шаге мы берем текущее натуральное число, раскладываем его в сумму каких-то двух натуральных слагаемых (эти слагаемые на каждом шаге мы можем выбирать как угодно), а затем перемножаем эти два слагаемых и получаем новое число. Назовем число $n$ волшебным, если, запустив алгоритм с числа, равного сумме цифр десятичной записи $n$, мы в какой-то момент времени можем получить число $n$.
Например, число 35 волшебное, поскольку сумма его цифр равна 8, и алгоритм

работает так: $8 = 6 + 2 \to 6 \cdot 2 = 12 = 7 + 5 \to 7 \cdot 5 = 35$.
Является ли волшебным число 2023?

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 3 (инвариант).*** По кругу расставлены 2024 контейнера, в каждом из которых изначально находится по одному шарику. Робот умеет брать два любых шарика и перекладывать их в соседние с ними контейнеры, но при этом один шарик должен быть переложен в соседний контейнер справа, а другой – в соседний контейнер слева. Например, можно взять шарики из контейнеров с порядковыми номерами 134 и 960 и переложить из них шарики в контейнеры с номерами 135 и 959 соответственно.
Можно ли написать для робота такую программу, что в результате ее работы
a) останется 8 контейнеров, в каждом из которых по 253 шарика;
b) останется 253 контейнера, в каждом из которых по 8 шариков?

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 4 (текстовые задачи).*** Аналитик приехал на конференцию. Там он узнал, что среди 190 других участников конференции 50 всегда говорят правду, 100 всегда лгут, а 40 могут говорить что угодно. Все, кроме аналитика, знают всё про всех остальных: кто всегда говорит правду, кто всегда лжёт, а кто может говорить что угодно.
Докажите, что, пообщавшись со всеми участниками конференции, аналитик гарантированно сможет выяснить, кто кем является.

*(А.Б. Меньщиков)*

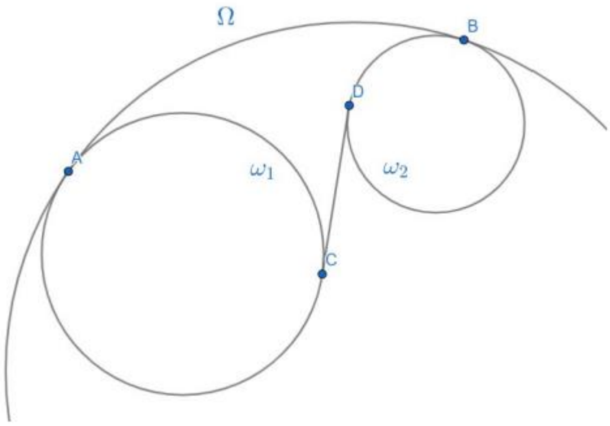
***Задача 5 (представление числа).*** Андрей загадал натуральное число $k$, а Виктор каким-то образом выписал на доску все натуральные числа, не содержащие в десятичной записи цифру 0. Затем Андрей огласил значение $k$, и Виктор вместо каждого записанного на доске числа $n$ записал разность между суммой цифр числа $n$ и суммой цифр числа $kn$ (и там, и там говорится о сумме цифр десятичной записи числа).
Докажите, что теперь на доске записано бесконечно много нулей.

*(Д.Е. Бебчук)*

**8–9 класс**

***Задача 1 (планиметрия).*** Окружности $\omega_1$ и $\omega_2$, не имеющие общих точек, касаются окружности $\Omega$ внутренним образом в точках $A$ и $B$, соответственно. Центры окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$ расположены по разные стороны от прямой $CD$ – общей касательной этих окружностей, причем точка $C$ лежит на $\omega_1$, а точка $D$ – на $\omega_2$. Найдите градусную меру дуги $AB$ окружности $\Omega$, если угол между прямыми $AC$ и $BD$ составляет $55^\circ$.

*(Д.Е. Бебчук)*




***Задача 2 (математические игры, графы).*** Алиса и Боб играют в игру. На плоскости отмечены $n > 1$ точек общего положения (т.е. никакие три из них не лежат на одной прямой), где $n$ – нечетное натуральное число. Алиса и Боб по очереди (начиная с Алисы) выбирают пару точек и соединяют их отрезком (запрещается повторно соединять точки, которые уже соединены отрезком). Проигрывает тот, после чьего хода образуется цикл нечетной длины.
Кто выиграет при правильной игре обоих соперников?

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 3 (неравенства).*** Для всех вещественных $x, y, z \geq 1$ докажите неравенство

$$\frac{x+y+z}{3} + xyz \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2$$

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 4 (математические игры, текстовые задачи).*** Весьма нестандартный людоед вечером перед сном поймал дружных математиков. «Сегодня я сыт, но завтра я разделаюсь с вами», – сказал он и потом продолжил: «Сегодняшнюю ночь вы проведете в общей камере, а завтра утром я рассажу вас по отдельным камерам с номерами, потом каждого из вас по отдельности (с глазу на глаз) спрошу, какой номер его камеры, и тех, кто угадает в этой первой попытке, выпущу из их камер у всех на глазах. Но после этого я каждому, кто сразу не угадал номер его камеры, дам еще одну попытку – еще раз (с глазу на глаз) спрошу про номер его камеры, однако, если хоть один из них ошибется – я съем всех!».
Как спастись всем математикам?
Известно, что математиков $n > 1$, индивидуальных камер тоже $n$, они пронумерованы какими-то целыми числами из диапазона от 0 до $(n - 1)$ (однако, в беспорядке и, возможно, с повторами и пропусками каких-то номеров – людоед-то малограмотный), из каждой камеры видны номера всех камер, кроме номера самой этой камеры, в общей камере математики могут договариваться о каком угодно алгоритме угадывания номеров своих камер, но в индивидуальных камерах они не могут общаться (передавать какие-либо

сигналы друг другу), а разговор с глазу на глаз слышат только его непосредственные участники (людоед и математик, участвующие в разговоре). Сам людоед честный: он действительно отпускает у всех на глазах математиков, которые угадали номера своих камер в первой попытке.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 5 (математические игры, графы).*** На столе лежат 16 карточек: на одной из них написано число 1, на второй – 2, на третьей – 3, . . ., на последней – 16. Вася перевернул их все и быстро перемешал так, что Петя не успел запомнить местоположение ни одной карточки, а сам Вася запомнил всё.
Петя хочет выложить все 16 карточек в ряд, не переворачивая их, так, чтобы числа на них шли слева направо либо по возрастанию, либо по убыванию. Вася хочет ему в этом помочь. За одну подсказку Вася может указать на две карточки и сказать Пете, чему равен модуль разности чисел на них (не сообщая, какое из чисел больше).
За какое наименьшее количество подсказок Вася может помочь Пете гарантированно добиться цели?

*(А.Б. Меньщиков)*

**10–11 класс**

***Задача 1 (стереометрия).*** В пространстве даны четыре попарно неравных и попарно параллельных отрезка $A_iB_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.
Докажите, что точки пересечения продолжений боковых сторон шести трапеций $A_iB_iA_jB_j$ $(1 \leq i < j \leq 4)$ лежат в одной плоскости.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 2 (теория чисел, представление числа).*** Натуральные числа вида 11 . . . 1 (десятичная запись состоит из $n$ единиц) будем обозначать $R_n$. Докажите, что существует такое натуральное число $k$, что $R_n$ делится на 41 тогда и только тогда, когда $n$ делится на $k$.

*(А.А. Гаврилюк)*

***Задача 3 (многочлены).*** Пусть $a$, $b$, $c$ – взаимно простые в совокупности натуральные числа, и

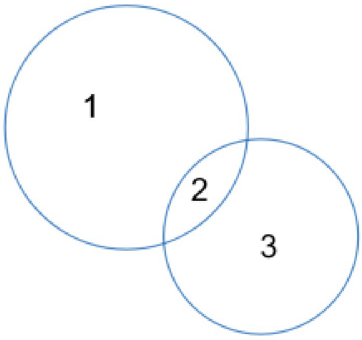
$$D_n = (a + b + c, a^2 + b^2 + c^2, a^n + b^n + c^n)$$

Найдите все возможные значения $D_n$, где $n$ – натуральное число, кратное 3.
Запись $(a_1, a_2, a_3, . . ., a_k)$ обозначает наибольший общий делитель целых чисел $a_1, a_2, a_3, . . ., a_k$.
Целые числа $a_1, a_2, a_3, . . ., a_k$ называются взаимно простыми в совокупности, если $(a_1, a_2, a_3, . . ., a_k) = 1$.

*(П.В. Бибиков)*

***Задача 4 (графы).*** На плоскости нарисовано несколько окружностей, причем каждая пара окружностей пересекается ровно в двух точках, и никакие три окружности не имеют общей точки. Круглосторонник – это часть плоскости, со всех сторон ограниченная дугами этих окружностей, граница которой состоит из каких-то дуг этих окружностей, причем между любыми двумя внутренними точками круглосторонника можно пройти, не пересекая ни одной дуги данных окружностей.

Например, ниже изображены две окружности, образующие 3 круглосторонника, обозначенные номерами 1, 2 и 3.




Смежные круглосторонники – это круглосторонники, имеющие общую дугу окружности в качестве границы, причем дуга должна быть невырожденной, то есть не сводящейся к одной точке. Например, на рисунке выше смежными являются круглосторонники 1 и 2, 2 и 3, но не 1 и 3.

Для какого наименьшего $C \geq 2023$ можно нарисовать окружности так, что выполнены условия, перечисленные выше, и эти окружности образовывали ровно $C$ круглосторонников?

Докажите, что для любого расположения нарисованных окружностей на плоскости, удовлетворяющих перечисленным условиям и образующих не менее 2023 круглосторонников, обязательно найдется круглосторонник, ограниченный менее чем 4-мя дугами.

*(Н.В. Шилов)*

***Задача 5 (комбинаторика).*** Назовём клетчатый квадрат, каждая клетка которого покрашена в чёрный или в жёлтый цвет, гармоничным, если в нём количество чёрных клеток отличается от количества жёлтых клеток не более чем на единицу. Сколькими способами можно раскрасить клетки таблицы 100 × 100 в чёрный и жёлтый цвета так, чтобы любой квадрат в этой таблице был гармоничным?

*(А.Б. Меньщиков)*

# РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ 2022–2023 УЧЕБНОГО ГОДА

## Задания 1-го отборочного тура

### 7 класс

***Задача 1.*** Заметим,что, согласно определению $A_n$, для каждого натурального $n > 1$ такое множество содержит все элементы множества $A_{n-1}$ и, кроме того, само множество $A_{n-1}$ – значит, в множестве $A_n$ на 1 элемент больше, чем в множестве $A_{n-1}$, на 2 элемента больше, чем в $A_{n-2}$ и т.д.
Итак, в множестве $A_n$ на $(n - 1)$ элемент больше, чем в $A_1$ – значит, в нем $2 + (n - 1) = n + 1$ элементов.

***Задача 2.*** Докажем, что больше 178 конфет быть не могло. Пусть всё же получилось съесть больше. Выпишем в ряд слева направо количества конфет, съеденных Катей за каждый из дней, где самые левые числа обозначают конфеты, съеденные в первые дни, а самые правые - в последние. Получается ряд из 25-ти чисел (в какой-то из дней может быть и 0). Будем идти вдоль этого ряда слева направа (то есть от самых давних значений к самым новым). В момент, когда будем встречать число 8 или больше, будем обводить это число и два последующих (или меньше, если до конца ряда осталось меньше чисел) в один овал - выделять их как группу. После выделения этой группы будем продолжать идти вдоль последовательности далее, если надо - снова выделяя новые группы овалами (один овал на одну группу из не более чем трёх чисел). Тогда внутри каждой выделенной группы из трёх чисел сумма не более 10 + 10 (первое число в группе не более 10, сумма двух последующих не более 10). Внутри выделенной группы из двух чисел сумма не более 15 по аналогичной причине. Если число в такой группе одно, то сумма в этой группе не превосходит 10. Тогда все числа разбиваются на несколько выделенных групп и остаток из чисел, которые не относятся ни к одной из выделенных групп. Числа вне групп каждое не превышает 7. Обозначим количество полных выделенных групп (то есть с тремя числами) k.
Если в конце ряда нет неполной группы (то есть содержащей одно или два числа), то в каждой группе сумма не превышает 20, как показано ранее. Чисел вне групп ровно $25 - 3k$, каждое не более 7. Значит общая сумма не превышает $7(25 - 3k) + 20k = 7 - 25 - k = 175 - k$, где $k$ - целое неотрицательное число. Значит максимум такой суммы равен 175.
Если в конце стоит неполная группа из одного числа (она не учитывается в количестве полных групп, которых $k$). Тогда сумма не превышает $7(25 - 3k - 1) + 20k + 10 = 178 - k$, то есть не более 178.
Если в конце стоит неполная группа из двух чисел, то (для формулировки с двумя пятёрками) сумма не превосходит $7(25 - 3k - 2) + 20k + 10 + 5 = 175 - 14 + 15 - k = 176 - k$, то есть не более 176.

***Задача 3.*** Давайте рассмотрим, сколько конфет было у Рона после каждого

заклинания:
0 заклинаний - 2 конфеты
1 заклинание - $3 \cdot 2 + 2$ конфет
2 заклинания - $3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2$ конфет
. . .
n заклинаний - $3^n \cdot 2 + 3^{n-1} \cdot 2 + \cdot \cdot \cdot + 3 \cdot 2 + 2$ конфет
Легко заметить, что количество конфет после n-го заклинания - сумма элементов геометрической прогрессии с первым элементом прогрессии $a = 2$ и знаменателем геометрической прогрессии $q = 3$. Заметим, что в нашей задаче $a = q - 1$. Таким образом, общая формула для количества конфет после n заклинаний будет: $S(n) = a \cdot (q^{n+1}-1)/(q-1) = q^{n+1} - 1$.
Таким образом, при $n = 14$ мы получим $3^{15} - 1 = 14348906$ конфет.

***Задача 4.*** Пусть $L$ - длина дорожки, и $t = 0$ в момент, когда папа и Саша начали движение от точки «Старт».
Ясно, что картинка полностью повторится, как только дедушка пройдёт полный круг – все скорости кратны $v$; так что рассматриваем только события до $T = L/v$.
За это время дедушка успеет повстречаться с Сашей 4 раза, а с папой один. Найдём времена $t_1$, $t_2$, $t_3$ и $t_4$ встреч Саши и дедушки, и время $t_d$ встречи папы и дедушки: между Сашей и дедушкой до первой встречи расстояние $L - d$, скорость сближения - $4v$, далее добавляется $L/4v$ - время, за которое Саша проезжает от дедушки до дедушки. Таким образом, получаем общую формулу $t_i = (iL - d)/4v$ для $i = 1, 2, 3, 4$. Аналогично $t_d = (L - d)/v$ . Теперь найдем решения уравнения $t_i = t_d$ относительно $d$ (т. е. найдем, при каких $d$ все встретятся в одной точке). Решения: $d = L$, $d = 2L/3$, $d = L/3$, $d = 0$. По условию задачи нам подходит ответ $d = L/3$, т. к. он минимальный и больше 0.

***Задача 5.*** Если хоббитов 11, то, рассматривая каждую пару товаров (например, кресала и кремни – а их всего $2 \cdot 6 = 12$) в рюкзаках, по принципу Дирихле делаем вывод, что хотя бы в одном рюкзаке есть пара этих предметов.
По условию, в рюкзаке не может оказаться 2 кресала или 2 кремня, значит, хотя бы у одного хоббита в рюкзаке окажутся кресало и кремень (обозначим $\{x, y\}$). То же можно сказать о паре кремень и трут (обозначим $\{y, z\}$), о паре кресало и трут (обозначим $\{x, z\}$).
Таким образом, выполняется одно из двух условий:
a) есть хотя бы один хоббит с предметами $\{x, y, z\}$ в рюкзаке (все пары собрались хотя бы в одном рюкзаке) и он разведёт костёр,
b) есть 3 разных хоббита с предметами $\{x, y\}$, $\{y, z\}$, $\{x, z\}$ соответственно, из этих трех хоббитов хотя бы два (по принципу Дирихле) окажутся в одной группе и тоже смогут развести костёр.

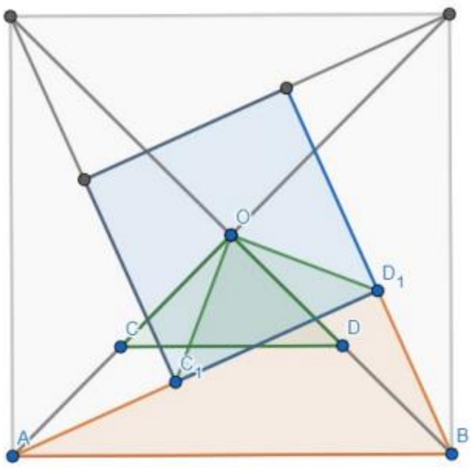
***Задача 6.*** Петя (первый игрок) может гарантировать себе победу. Для победы Пети следует своим первым ходом вырезать центральную клетку квадрата, а

далее на каждый ход Вити отвечать симметричным ходом относительно центра доски.
Покажем, что если Витя сделал свой очередной ход, то Петя тоже сможет сделать ход согласно этой стратегии: действительно, после каждого сделанного хода Пети картинка из закрашенных клеток на доске (не учитывая цвет) симметрична. Тогда, если Витя сделал свой очередной ход, то симметричная зона доски перед ходом Вити была также свободна.
Остается объяснить, почему сам последний ход Вити не затронул эти клетки. Но действительно, если одним ходом Витя покрасил бы две какие-либо симметричные относительно центра клетки, то так как этот ход состоял в закрашивании прямоугольника, то и центр симметрии клеток должен был попасть в эту фигуру. Однако центр симметрии уже был изначально закрашен Петей. Значит Витя не мог «испортить» позицию для Пети, и Петя может сделать ход. Кто-то в этой игре обязательно проигрывает, и это не Петя. Значит, Петя выигрывает.

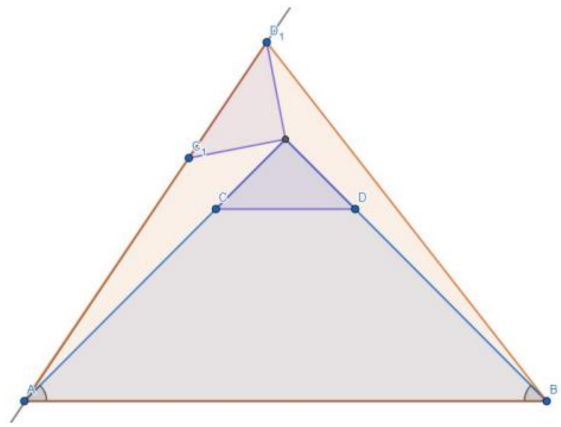
## 8–9 класс

***Задача 1.*** См. решение задачи №3 для 7 класса.

***Задача 2.*** В клетках указанной диагонали записаны числа $100 \cdot 1, 99 \cdot 2, 98 \cdot 3$, . . . ,$1 \cdot 1000$. То есть в общем виде - числа вида $k(101-k)$ при целых $k$ от 1 до 100. Это уравнение стандартной параболы ветвями вниз, с корнями в точках 0 и 101. Абсцисса её вершины равна 101/2. Левее неё, т.е. на интервале $(-\infty, 101/2]$ эта функция возрастает, т.е. максимальное её значение при $k = [101/2] = 50$ и равно $50(101 - 50) = 50 \cdot 51 = 2550$. Правее же вершины (т. е. на $[101/2, +\infty)$ эта функция убывает и аналогично её максимум достигается при k = 51 и равен также 2550. Таким образом, максимальное число на диагонали равно 2550.




***Задача 3.*** Расширив чертеж, получим два правильных четырёхугольника со сторонами $|AB|$ и $|CD|$ и общим центром $O$. Заметим, что нам просто нужно вычесть площадь меньшего правильного четырёхугольника (со стороной $|CD|$) из площади большего правильного четырёхугольника (со стороной $|AB|$) и поделить результат на 4 (см. рисунок). Искомая площадь треугольника равна $(|AB|^2 - |CD|^2)/4 = 52.25$.
Если же луч $AD_1$ целиком находится вне треугольника $AOB$ (см. рисунок ниже), получим $S_{ABD1} \approx 77.13$.

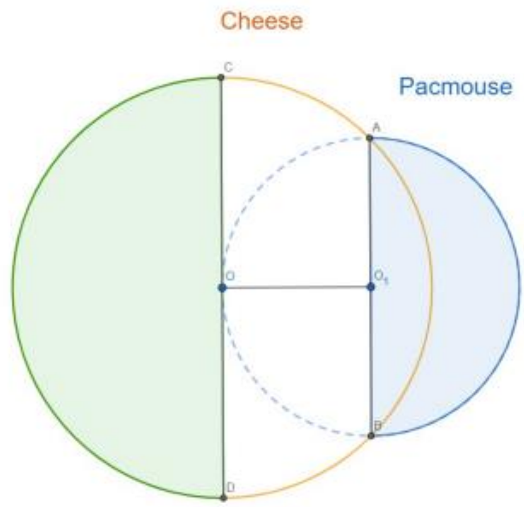


***Задача 4.*** Пакмышей две, и они честные и рациональные – значит, у одной мыши в распоряжении полкруга (на рисунке вторая половина зеленая). Обозначим диаметр пакмышки $d$, радиус $r$, для сыра - $D$ и $R$ соответсвенно. Пакмышь наелась, значит, $|AB| = d$ ($A$ и $B$ - крайние точки выгрызенного куска на корке сыра). Нас интересует максимально возможный диаметр, значит, нас интересует случай, когда челюсти пакмыши сомкнулись в центре сыра (окружность радиуса $r$ с центром в точке $O_1$ коснулась диаметра $CD$ окружности с центром в точке $O$). Тогда треугольник $OO_1A$ прямоугольный равнобедренный, и $r = OO_1 = O_1A = \frac{\sqrt{2}}{2}R$, то есть, $d = \frac{\sqrt{2}}{2}D$.

Обозначим площадь съеденного куска $S_{CK}$, $S_C$ - площадь сыра (окружности с центром $O$ радиуса $R$), $S_M$ - площадь пакмыши (окружности с центром $O_1$ радиуса $r$), $S_{AB}$ - площадь меньшего кругового сегмента сыра, отсечённого хордой АВ. Тогда $S_{CK} = S_M/2 + S_{AB}$; $S_{AB} = (S_C - 2R^2)/4$.

Площадь оставшегося куска

$S_{OK} = S_C - 2S_{CK} = S_C - 2(S_M/2 + (S_C - 2R^2)/4) = S_C/2 + R^2 - S_M = (\pi/2 + 1)R^2 - \pi r^2 = R^2 = D^2/4$




***Задача 5.*** См. решение задачи №6 для 7 класса.

***Задача 6.*** Отдельно рассмотрим четные и нечетные значения $n \geq 0$.

Пусть $n = 2k + 1 > 0$ – произвольное нечетное целое. Тогда многочлен $P_n(x)$ имеет вид $x^{7(2k+1)} - x^{7\cdot 2k} + \cdot\cdot\cdot + x^7 - 1 = x^{14k}(x^7 - 1) + \cdot\cdot\cdot + (x^7 - 1) = (x^7 - 1)\cdot(x^{14k} + x^{14(k-1)} + \cdot\cdot\cdot + x^{14} + 1)$.
Легко заметить, что $x = 1$ – единственный корень этого многочлена (т. к. $x^{14k} + x^{14(k-1)} + \cdot\cdot\cdot + x^{14} + 1 \geq 1$ для любого вещественного $x$).
Пусть $n = 2k > 0$ – произвольное четное целое. Тогда многочлен $P_n(x)$ имеет вид $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdot\cdot\cdot - x^7 + 1$. Докажем, что уравнение $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdot\cdot\cdot - x^7 + 1 = 0$ не имеет решений в вещественных числах.
Для этого предположим противное, то есть что есть такое вещественное число $x$, для которого верно равенство $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdot\cdot\cdot - x^7 + 1 = 0$.
1) $x$ не может быть $\leq 0$ или $\geq 1$, т. к. $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdot\cdot\cdot - x^7 + 1 \geq 1$ для таких $x$.
2) Если же $0 < x < 1$ и $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdot\cdot\cdot - x^7 + 1 = 0$, то $(x^7 - 1)(x^{7\cdot 2k-7} + x^{7\cdot 2k-21} + \cdot\cdot\cdot + x^7) = -1$ и $x^{7\cdot 2k-7} + x^{7\cdot 2k-21} + \cdot\cdot\cdot + x^7 = 1/(1 - x^7)$. Слева в этом равенстве стоит сумма конечного числа элементов геометрической прогрессии со знаменателем $0 < x < 1$, а справа стоит полная сумма (бесконечного числа элементов) бесконечно убывающей прогрессии. Равенство этих сумм невозможно. Таким образом, предположение, что уравнение $x^{7\cdot 2k} - x^{7\cdot 2k-7} + \cdot\cdot\cdot - x^7 + 1 = 0$ имеет решение в вещественных числах во всех случаях привело нас к противоречию. Следовательно, предположение неверно, а уравнение не имеет решений в вещественных числах.
Значит, для любого нечетного $n \geq 0$ многочлен $P_n(x)$ имеет единственный вещественный (не кратный) корень $x = 1$, а для любого четного $n \geq 0$ многочлен $P_n(x)$ не имеет вещественных корней.

## 10–11 класс

***Задача 1.*** См. решение задачи №3 для 8–9 кл.

***Задача 2.*** См. решение задачи №4 для 7 кл.

***Задача 3.*** См. решение задачи №2 для 8–9 кл.

***Задача 4.*** Пусть $a_n$ - количество символов в записи $A_n$. Для начала рассмотрим формулу для $a_{n+2}$ = 1(открывающая скобка) + $a_{n+1}$ + 1(запятая) + 1(открывающая скобка) + $a_{n+1}$ + 1(закрывающая скобка) + 1(закрывающая скобка) $= 2a_{n+1} + 5 = 2(2a_n + 5) + 5 = 2^2a_n + 2^1\cdot 5 + 2^0\cdot 5 = 2^2(2a_{n-1} + 5) + 2^1\cdot 5 + 2^0\cdot 5 = 2^3a_{n-1} + 2^2\cdot 5 + 2^1\cdot 5 + 2^0\cdot 5 = 2^3a_{n-1} + 5\,\frac{2^3-1}{2-1}$ (сумма геометрической прогрессии).
На этом основании можно выдвинуть гипотезу: формула для общего члена последовательности имеет длину $a_n = 2^na_0 + 5\,\frac{2^n-1}{2-1} = 6\cdot 2^n - 5$.
Докажем эту формулу индукцией по $n > 0$. База индукции: $a_0 = 1 = 6\cdot 2^0 - 5$. Предположение индукции: $a_n = 6\cdot 2^n - 5$. Шаг индукции: $a_{n+1} = 2a_n + 5 = 2\cdot(6$

$\cdot\ 2^n - 5) + 5 = 6 \cdot 2^n+1 - 10 + 5 = 6 \cdot 2^{n+1} - 5$.
Таким образом, $a_7 = 6 \cdot 2^7 - 5 = 763$.

***Задача 5.*** Рассмотрим функцию $f(x) = x^x$ для вещественных $x$ и докажем, что она монотонно возрастает при $x > 1$. Итак, $f'(x) = (x^x)' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x} \cdot (\ln x + 1)$. Для $x > 1$ имеем $\ln x > 0 > -1$, откуда $f'(x) > 0$, из чего следует монотонное возрастание $f(x)$ для $x > 1$.
Заметим, что при $0 < x \leq 1$ функция $f(x)$ принимает значения, не превосходящие 1 (число, меньшее 1, возводится в положительную степень). Из всего сказанного следует, что уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного положительного корня при $a > 1$.
Теперь решим уравнение $x^{x^5} = 100$, сначала преобразовав его к виду $(x^{x^5})^5 = 100^5 = 10^{10} \Rightarrow (x^5)^{x^5} = 10^{10} \Rightarrow f(x^5) = 10^{10} > 1$ для введенной ранее функции $f(x)$. Заметим, что это уравнение имеет корень $x = \sqrt[5]{10}$, при этом (согласно доказанному выше) других положительных корней у него нет.

***Задача 6.*** Рассмотрим произвольные 4 цвета из пяти. Пятый цвет назовём цвет $A$. Перекрасим линии, проведённые каждым из выбранных четырёх цветов в некоторый новый цвет, который назовём цвет $B$ и будем доказывать задачу из условия для двух цветов. Отмеченные точки будем называть вершинами, а линии, соединяющие пары точек - рёбрами.
Пусть неверно, что каждая вершина соединена с любой другой некоторым путём цвета $A$. Тогда есть конкретные две вершины $v_1$ и $v_2$, которые не соединены ни одним путём, целиком состоящим из рёбер цвета $A$. Пусть тогда $V_1$ — это группа всех вершин, в которые можно попасть из $v_1$ только по рёбрам цвета $A$, а $V_2$ - остальные вершины, то есть те, до которых по рёбрам цвета $A$ из $v_1$ попасть невозможно. Тогда легко видеть, что, во-первых, $v_1$ принадлежит $V_1$, а $v_2$ принадлежит $V_2$. Во-вторых, из $V_1$ в $V_2$ не идёт ни одного ребра цвета $A$, иначе $V_1$ содержит не все вершины, которые должна содержать по определению (которые достижимы по рёбрам цвета $A$ из $v_1$). Но группы $V_1$ и $V_2$ вместе составляют все вершины, обе эти две группы непустые, а также все рёбра между вершинами этих групп (когда одна вершина из одной группы, а другая - из другой) имеют цвет $B$.
Тогда очевидно, что любые две вершины связаны друг с другом путём цвета $B$ (причём состоящим не более чем из двух рёбер), что и требовалось доказать.

## Задания 2-го отборочного тура

### 7 класс

***Задача 1.*** Пусть в первом случае награда каждого пирата равна $t$, а во втором - $s$. Тогда общая награда равна соответственно $99t$+51 и $77s$+29. По условию в обоих случаях награда одинаковая, больше 0 и меньше 1000. Имеем $99t + 51$

$= 77s + 29$.
Во-первых получаем, что $99t + 51 < 1000$, то есть $99t < 949$ или $t < 949/99 = 9+50/99$. Так как $t$ - целое, то имеем $0 < t \leq 9$. Во-вторых, упрощая равенство, получаем $99t+22 = 77s$, что можно сократить еще раз, поделив на 11. Получаем $9t + 2 = 7s$.
Перебрав варианты $t$ от 0 до 9, находим, что только при $t = 6$ полученное число делится 7, чтобы справа могло получится выражение $7s$. Итого получается, что $t = 6$, $s = 8$, а само число равно 645.

***Задача 2.*** Заметим, что можно расставить коней на белых клетках, и никакие два коня друг друга не побьют. Докажем, что больше 32 коней расставить не получится. Действительно, каждый конь бьет ровно 8 клеток, и каждую клетку бьет не более 8 коней, поэтому $k$ коней, не бьющих друг друга, занимают $k$ клеток и бьют не более $8k/8 = k$ клеток. Поэтому $k + k \leq 64 \Rightarrow k \leq 32$. Заметьте, что для доски $m \times n$ ответ будет $[mn]/2$, где $[a]$ обозначает целую часть числа $a$.

***Задача 3.*** Заметим, что из любого города выходят или 0, или одна, или две дороги. Значит, все города распадаются на одиночно стоящие, цепи и циклы. Также заметим, что треугольных циклов нет. Теперь отметим, что в каждой цепи можно взять не менее половины дорог, а в каждом цикле - не менее 2/5 дорог, поскольку если в цикле $k$ дорог, то при четном $k$ мы берем $k/2$ дорог, а при нечетном $k - (k-1)/2$, что не меньше $0{,}4 \cdot k$ при $k \geq 5$. Пример дается циклами длины 5.

***Задача 4.*** Заметим, что искомый НОД делит число $2^7 - 2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$. Также НОД не делится на 9, т.к. на 9 не делится число $3^7 - 3$. Поэтому НОД не больше $2 \cdot 3 \cdot 7$. Однако, число $n^7 - n$ делится и на 2, и на 3, и на 7 по малой теореме Ферма. Таким образом, наибольший общий делитель равен 42. В остальных задачах принцип решения аналогичный: раскладываем число $2^n - 2$ на множители, затем с помощью проверки делимости числа $3^n - 3$ отбрасываем $3^2$ (и все остальные степени, больше первой, если они есть, например $2^2$), а остальные делители проверяем с помощью малой теоремы Ферма и свойствами арифметики по модулю.

***Задача 5.*** Стратегия для Пети: пока есть цифры, делящиеся на 3, в свой ход Петя вычеркивает такую цифру. Далее, если ещё потребуется делать ходы, Петя вычеркивает цифры произвольно.
Заметим, что если Пете удастся добиться вычеркивания всех цифр, делящихся на 3 (такие мы далее будем называть хорошими), то финальное однозначное число не будет делиться на 3, а Ваня, соответственно, проиграет. Покажем, что Пете хватит ходов для этого.
Сначала выясним общее число ходов (на двоих): это в точности количество цифр изначального числа. Стратегия для Пети: пока есть цифры, делящиеся на

3, в свой ход Петя вычёркивает такую цифру. Далее, если ещё потребуется делать ходы, Петя вычёркивает цифры произвольно. Заметим, что если Пете удастся добиться вычёркивания всех цифр, делящихся на 3 (такие мы далее будем называть хорошими ), то финальное однозначное число не будет делиться на 3, а Ваня, соответственно, проиграет. Покажем, что Пете хватит ходов для этого.

Сначала выясним общее количество ходов (на двоих): это в точности количество цифр изначального числа. Это количество составлено из цифр однозначных чисел (которых 9 в записи), двузначных (которых 90), трёхзначных (их 900), и четырёхзначных (их $2022 - 999 = 1023$). То есть всего количество цифр в записи изначального длинного числа (будем его называть шаблоном) равно $9+2\cdot 90+3\cdot 900+4\cdot 1023 = 9+180+2700+4092 = 6981$.

Количество ходов же совпадает с количеством вычеркнутых чисел в конце, а их 6980 (так как осталось одно). Покажем, что хороших цифр в записи шаблона менее половины от 6980 (то есть менее $6980/2 = 3490$). Для этого отдельно посчитаем количество таких цифр, которые получаются из однозначных чисел записи, из двузначных и так далее.

Заметим, что всего в записи чисел от 1 до 9 количество хороших цифр равно 3. Среди двузначных чисел в записи шаблона количество хороших цифр на первой позиции (соответствующего числа) равно $3 \times 10$, так как на первой позиции, допустимы лишь хорошие цифры 3, 6 и 9 - всего три варианта. Для каждой из этих цифр встретятся все 10 вариантов второй цифры, то есть в разряде единиц. Аналогично вычисляем, что количество хороших цифр на вторых позициях двухзначных чисел в шаблоне равно $4 \times 9$. Итого, хороших цифр, полученных из двузначных чисел в записи шаблона, всего $3 \cdot 10 + 4 \cdot 9 = 30 + 36 = 66$.

Аналогично из трёхзначных чисел в шаблоне получаются $3 \cdot 100 + 4 \cdot 90 + 4 \cdot 90 = 300 + 360 + 360 = 1020$ хороших цифр. Для четырёхзначных чисел также разделим подсчёт на две части: для чисел от 1000 до 1999 и для чисел от 2000 до 2022.

В первой подгруппе во всех числах первая цифра не является хорошей, а количество хороших цифр среди этих тысячи чисел равно $4\cdot 100\times 3 = 1200$. Во вторую подгруппу (от 2000 до 2023) попали 23 числа. Вручную проверяем, что количество хороших цифр в разряде тысяч равно 0 (все двойки), а в разряде сотен - равно 23 (все нули). В разряде десятков хороших цифр 10, а в разряде единиц 9. Итого из $4 \times 23 = 92$ цифр этих 23х чисел $23 + 10 + 9 = 42$ хороших.

Остаётся отметить, что в каждой из рассмотренных групп количество хороших цифр меньше половины: в однозначных 3 из 9, в двузначных 66 из 180, в трёхзначных 1020 из 2700, в четырёхзначных в первой подгруппе 1200 из 4000, во второй подгруппе 42 из 92.

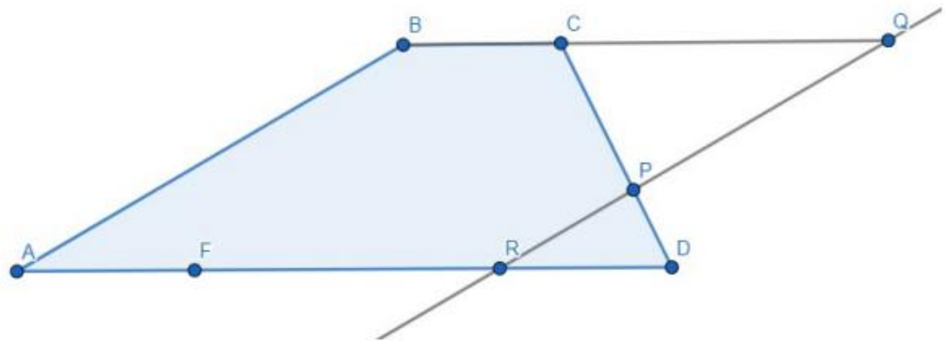
Таким образом, хороших цифр в шаблоне меньше количества ходов Пети, то есть он сможет вычеркнуть их все (кроме тех, которые вычеркнет Ваня) и гарантировать себе победу.

***Задача 6.*** Докажем, что Боб выиграет. Для этого ему нужно создать комбинацию $O[][]O$ ([] обозначает пустую клетку). Ясно, что не позднее чем за 2 хода он сможет это сделать, расположив сначала букву О на достаточно большом расстоянии от клетки Алисы и края доски, а вторым ходом — расположив букву О на расстоянии 2 клетки от своей первой буквы О (с одной из сторон, где он сможет это сделать, такая сторона всегда найдется). После этого момента он будет ждать, когда Алиса сделает свой ход в одну из клеток между его буквами О – тогда в любом случае можно будет дополнить до слова ОГО и победить. Алиса вынуждена будет это сделать, поскольку после любого ее хода на доске останется нечетное количество пустых клеток, а значит, найдется клетка, справа и слева от которой либо нет букв, либо есть обе буквы. Боб может поставить Г в эту клетку и не проиграет.
Для других вариантов все зависит от четности количества клеток: если их четное количество, то выигрывает Боб. В противном случае – Алиса.

**8–9 класс**

***Задача 1.*** См. решение задачи №1 для 7 кл.

***Задача 2.*** Обозначим как Q точку пересечения проведённой прямой RP с прямой BC. Тогда, по равенству соответствующих внутренних накрест лежащих углов, треугольники PDR и PCQ подобны друг другу с коэффициентом подобия 1 : 2 (так как этому равно отношение сторон PD к CP по условию). Тогда CQ = 2RD = 2BC.
Заметим, что четырёхугольник ABQR по определению является параллелограммом (так как пары противоположных сторон параллельны). Значит, сторона AR равна стороне BQ, то есть AR = BC + CQ = 3RD.




Отметим такую точку F на основании AD, что BC = AF. Тогда ABCF также является параллелограммом (по признаку, так как AF и BC равны и параллельны). Кроме того, если отметить и соединить отрезком середины сторон CQ и FR параллелограмма FCQR, то становится очевидно, что он составлен из двух параллелограммов, каждый из которых совмещается с ABCF параллельным переносом (то есть они равны как геометрические фигуры). Значит, площадь параллелограмма CQRF в два раза больше площади

параллелограмма ABCF.
Пусть площадь треугольника RPD равна S. Тогда так как, упоминалось ранее, треугольник PCQ подобен данному треугольнику PDR с коэффициентом 2, то площадь $S_{PCQ} = 2^2 \cdot s = 4 \cdot s$. Аналогично, легко видеть, что треугольник CDF подобен треугольнику PDR с коэффициентом 3. Значит, $S_{CDF} = 3^2 \cdot s = 9 \cdot s$. Таким образом, площадь параллелограмма FCQR равна $S_{FCQR} = S_{FCPR} + S_{PCQ} = S_{FCD} - S_{RPD} + S_{PCQ} = 9 \cdot s - s + 4 \cdot s = 12 \cdot s$.
Таким образом, как указано на два абзаца выше, $S_{ABCF} = S_{FCQR}/2$, что равно $6 \cdot s$ по результатам предыдущего абзаца. Остается заметить, что $S_{ABCD} = S_{ABCF} + S_{FCD} = 6 \cdot s + 9 \cdot s$, как было вычислено ранее. То есть $S_{ABCD} = 15 \cdot s = 40$, откуда $s = 40/15 = 8/3$.
Найти же требуется $S_{ABR} = S_{ABQR}/2$, так как ABQR - параллелограмм, а BR – его диагональ. То есть $S_{ABR} = (S_{ABCF} + S_{FCQR})/2 = (6 \cdot s + 12 \cdot s)/2 = 9 \cdot s$. Итого, искомая площадь равна $S_{ABR} = 9 \cdot s = 9 \cdot (8/3) = 24$.

***Задача 3.*** Разделим таблицу на квадраты 2 × 2. Ясно, что в каждом квадрате 2 × 2 есть ровно одна шашка. Поэтому нам нужно посчитать, сколькими способами можно расставить по одной шашке в каждый квадрат 2 × 2, чтобы клетки с шашками не граничили бы по углу.
Без ограничения общности будем считать, что у всех квадратов 2 × 2 правая нижняя клетка белая. Будет называть квадрат ПН-квадратом, если шашка стоит в правой нижней его клетке, и ЛВ-квадратом, если шашка стоит в левом верхнем углу.
Заметим, что если какой-то квадрат является ПН-квадратом, то и квадраты справа и снизу от него являются ПН-квадратами. Аналогичное верно и для ЛВ-квадратов. Таким образом, все ПН-квадраты образуют связную область, и все ЛВ-квадраты образуют связную область.
Ясно, что количество расстановок шашек зависит от количества способов разбить наш прямоугольник на две такие области. Линия границы между этими областями ведет из левого нижнего угла таблицы в правый верхний угол по линиям сетки. Количество способов провести такую линию равно соответствующему биномиальному коэффициенту $C^3{}_6 = 20$.

***Задача 4.*** Пусть $n = p^\alpha m$, где $(m, p) = 1$, $p$ − простое и $\alpha \geq 2$. Тогда подставим $x = p^{\alpha-1}m$ и получим сравнение $0 \equiv_n x$, что неверно. Значит, число n свободно от квадратов.
Пусть p - производный простой делитель числа n. Тогда $x^{24} \equiv_p 1$ для всех $x = 1, ..., p-1$. Но $x^{p-1} \equiv_p 1$ для этих $x$. Обозначим через d НОД(p - 1, 24).Тогда $x^d \equiv_p 1$ для всех $x = 1, ..., p-1$. Получается, что у уравнения $x^d - 1 \equiv_p 0$ есть p - 1 корень. Значит, d = p - 1 и 24 делится на $p-1$.
Итак, мы получаем, что для любого простого делителя p числа n имеет место делимость 24 на $p$−1. Отсюда p = 2,3,5,7,13. Таким образом, n является произведением каких-то из этих чисел. Получаем количество n, равное $2^5 - 1 = 31$.

***Задача 5.*** См. решение задачи №5 для 7 кл.

***Задача 6.*** Выделим в первом неравенстве полные квадраты: $(x+2y)^2+2(3x)^2\le 3$. Предположим $u=x+2y$, $v=3x$. Тогда $2u^2+v^2\le 3$ и $v-2u\le -3$.
Теперь домножим второе неравенство на 2 и сложим с первым: получим $2(u-1)^2+(v+1)^2\le 0$, откуда $u=1$, $v=-1$ и $x=-1/3$ , $y=2/3$.

## 10–11 класс

***Задача 1.*** См. решение задачи №4 для 8–9 кл.

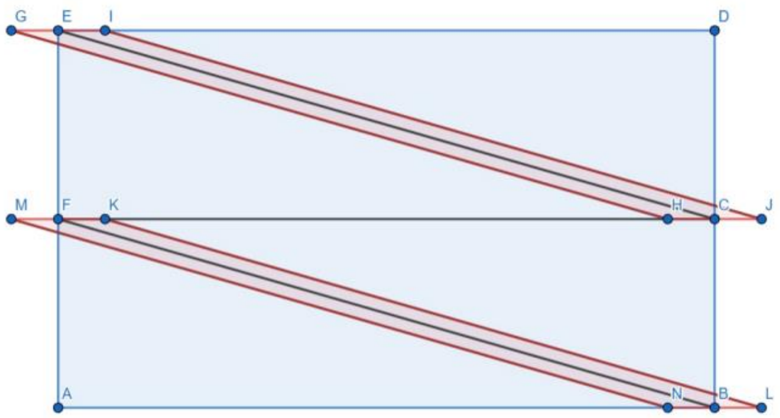
***Задача 2.*** Докажем более общее утверждение: если даны числа от 1 до $2^n$, то минимальное количество карточек, необходимое для выигрыша, равно $n$. То, что Боб выиграет на $n$ карточках, следует из такого алгоритма. Он смотрит на первую карточку, и, если на ней написано меньше половины чисел, он ее переворачивает. Теперь хотя бы половина чисел присутствует. Далее он смотрит на вторую карточку, и, если на ней написана меньше половины из оставшихся чисел, он ее также переворачивает, и т. д.
Таким образом, после каждого своего шага он уменьшает количество ненаписанных на карточках чисел как минимум в 2 раза. Значит, после $n$ таких действий Боб добьется желаемого. То, что $n-1$ не хватит, можно доказать индукцией по $n$. Для этого занумеруем все числа в двоичной системе, и на первой карточке на одной стороне запишем числа, у которых первая цифра в двоичной системе равна 0, а на другой – у которых равна 1. На второй карточке – у которых вторая цифра равна 0 или 1, и т.д. Тогда, убирая первую карточку, например, с числами, начинающимися на 1, мы оставим $n-2$ карточки и $2^{n-1}-1$ чисел, начинающихся на 0, что дает возможность применить предположение индукции. База индукции очевидна. В нашем случае нужно взять в качестве ответа $k=[\log_2 2022]=11$.

***Задача 3.*** Рассмотрим белую непобитую клетку доски $6\times 6$. Поскольку в одной строке с ней есть не более 3 черных клеток, каждую из которых должна бить какая-то ладья, то в соответствующих столбцах стоит хотя бы одна ладья. Аналогично, в одном столбце с непобитой белой клеткой есть не более 3 черных клеток, каждую из которых должна бить какая-то ладья, то в соответствующих строках стоит хотя бы одна ладья. Значит, есть не менее 3 целиком побитых столбцов и не менее 3 целиком побитых строк. Значит, останется не более 3 целиком непобитых столбцов и не более 3 целиком непобитых строк. На их пересечении будет не более 9 непобитых белых клеток.
Легко привести пример, показывающий точность нашей оценки: поставьте ладью в одну из угловых белых клеток. Затем поставьте по 2 ладьи через 1 и через 3 клетки в строке и в столбце выбранной угловой клетки.

***Задача 4.*** Пусть количество карт в колоде равно $2n + 1$. Обозначим через $\mu_k$ первую тасовку, где снимается $k$ верхних карт, а через $\lambda$ - вторую тасовку. Заметим, что $\mu_l\mu_k = \mu_{l+k}$, $\lambda^{2n} = 1$ и $\lambda\mu_k\lambda^{-1} = \mu_l$, где $l \equiv_{2n+1} (n + 1)k$.
Поэтому любая комбинация перестановок $\lambda$ и $\mu_k$ сводится к комбинациям вида $\mu_t\lambda^{2n-1}$, . . ., $\mu_t\lambda$ и $\mu_t$, причем все такие перестановки различны. Ясно, что перестановок каждого вида ровно $2n$ а всего их $2n + 1$. Итого получаем $2n(2n + 1)$.

***Задача 5.*** Докажем, что если отклеить полосу, то она будет являться параллелограммом. Во-первых, представим, муха ползла не по поверхности кружки, а по бумажной подкладке, в которую предварительно обернули кружку: подкладка прямоугольной формы, размер $7 \times l$, где $l$ - длина окружности дна кружки, то есть $2\pi \cdot 4/\pi = 8$. Как известно, такой лист можно свернуть в цилиндр высоты 7 и радиуса $4/\pi$, то есть как раз подходящим, чтобы поместить внутрь кружку из условия. Поместим этот лист так, чтобы вертикальный шов (вдоль которого совмещаются противоположные края этого листа длины 7) начинался и заканчивался соответственно, в точках начала и окончания пути мухи они как раз находятся на одной вертикали относительно дна кружки.
Во-вторых, повторим маршрут мухи на этой обёртке (карандашом) это будет линия, которая начинается в одном углу прямоугольной обёртки и заканчивается в противоположном углу, причём эта линия пересекает шов (то есть обе стороны листа длины 7) один раз, так как на поверхности цилиндра, покрытого этим листом, совершает два полных оборота. Докажем, что на развёрнутом листе бумаги (смотреть иллюстрацию) эта линия превращается в два отрезка. Действительно, по условию, муха перемещалась с постоянной вертикальной скоростью. Вертикальная скорость (относительно кружки), при повторении движения на развёрнутом листе обёртки, превращается в скорость перемещения точки по поверхности листа вдоль стороны длины 7. То есть виртуальная модель мухи, повторяющая траекторию мухи на обёртке со скоростью реальной мухи, имеет постоянную скорость вдоль направления стороны длины 7.
Легко видеть, что угловая скорость мухи превращается в скорость виртуальной мухи вдоль стороны длины 8 листа бумаги просто домножением на коэффициент $2\pi$. Значит, скорость виртуальной мухи в этом направлении также постоянна. Тогда, считая стороны листа обёртки осями $Ox$ и $Oy$, имеем, что $x$ и $y$ компоненты скорости виртуальной мухи постоянны. Тогда и общий вектор скорости виртуальной мухи, который равен сумме своих $x-$ и $y-$ проекций, является постоянным. То есть, кроме момента пересечения шва обёртки, траектория движения мухи прямолинейна. Таким образом, получаем, что липкая лента приклеена вдоль прямой линии, если смотреть по обёртке, и обрезана вдоль сторон длины 8 этой обёртки, то есть вдоль прямых параллельных линий на развёртке. То есть липкая лента имеет форму параллелограмма (при отклеивании и выравнивании на плоскости), а средняя

линия этого параллелограмма совпадает с траекторией мухи. Траектория мухи это два отрезка на обёртке (отрезки $EC - FB$), которые можно представить в виде одной целой диагонали листа размера $7 \times (2 \cdot 8)$, который получается прикладываем двух экземпляров обёртки вдоль шва. Таким образом, длина траектории равна $\sqrt{7^2 + 16^2} = \sqrt{305}$, а площадь липкой ленты длина средней линии параллелограмма на толщину параллелограмма (то есть 2 см). Итого, ответ - $2\sqrt{305}$ см².




***Задача 6.*** Сразу отметим, что такие функции существуют, и их достаточно много. Приведем в пример одну возможную комбинацию:

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{m}, \text{если } \mathrm{x} = \mathrm{m} + \mathrm{n}\pi, \text{где } \mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathrm{Z} \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -\mathrm{n}, \text{если } \mathrm{x} = \mathrm{m} + \mathrm{n}\pi, \text{где } \mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathrm{Z} \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

Тогда в любой точке $x$, которая не представима в виде $m + n\pi$, функция $h(x) = f(x) + g(x)$ равна 0. Если же $x = n + m\pi$, имеем $h(x) = m - n = (m + 1) - (m + 1) = f(x + (1 + \pi)) + g(x + (1 + \pi))$.
Значит, $h(x)$ – периодическая функция с периодом $1 + \pi$.

## Задания финального тура

### 7 класс

***Задача 1.*** Заметим, что каждую покраску можно отразить (раскрасить стены в обратном порядке), а значит, все покраски можно разбить на пары. Поэтому достаточно рассмотреть только одну покраску из каждой пары, а значит, будем считать, что желтая стена справа от голубой.
Пронумеруем стены комнаты числами от 1 до 6, поворачиваясь по часовой стрелке. Поскольку покраски, совпадающие при повороте, считаются одинаковыми, будем считать, что стена 1 покрашена в голубой цвет, а стена 2 – в желтый. Остались четыре непокрашенные стены и четыре цвета, поэтому общее количество способов их покрасить равно $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Из них нам не

подходят варианты, в которых синяя и зеленая стены соседствуют:
$G, B$, O, O;
$B, G$, O, O;
O, $G, B$, O;
O, $B, G$, O;
O, O, $G, B$;
O, O, $B, G$.
Буквами $G$, $B$ здесь обозначены соответственно зеленый и синий цвета, а символом О – стены для покраски в красный и оранжевый цвета. Заметим, что для каждого из шести перечисленных вариантов существуют по два варианта покраски в красный и оранжевый цвета – значит, неподходящих вариантов ровно 6 · 2 = 12, а остальные 12 из 24 подходят.
Осталось вспомнить, что все «правильные» покраски можно разбить на симметричные пары, а значит, всего их 12 · 2 = 24.

***Задача 2.*** Заметим, что 2023 = 17 · 119, поэтому в ходе работы нашего алгоритма нам нужно получить число 17 + 119 = 136. Удобно для этого запустить процесс в обратную сторону: разложить число на два множителя и затем вычислить их сумму. Получим следующий процесс:
2023 = 17 · 119 → 17 + 119 = 136 = 8 · 17 → 8 + 17 = 25 = 5 · 5 → 5 + 5 = 10
Таким образом, нам достаточно, стартуя с числа 2 + 0 + 2 + 3 = 7, получить число 10. Это совсем легко:
7 = 4 + 3 → 4 · 3 = 12 = 11 + 1 → 11 · 1 = 11 = 10 + 1 → 10 · 1 = 10
Получив число 10 и развернув в обратную сторону процесс, описанный выше, получим алгоритм, приводящий нас к числу 2023. Значит, оно волшебное.

***Задача 3.*** а) Покажем, что это возможно. Пронумеруем контейнеры числами от 1 до 2024. Сначала переложим все шарики из контейнеров с номерами от 1 до 252 в контейнер 253, одновременно перекладывая шарики из контейнеров с номерами от 2024 до 1773 в контейнер 1772. Аналогично поступим с контейнерами с номерами от 254 до 505 и контейнерами с номерами от 1771 до 1520, номерами от 507 до 758 и номерами от 1518 до 1267, и наконец, с номерами от 760 до 1011 и номерами от 1265 до 1014. В итоге мы получим требуемое распределение шариков.
b) Докажем, что такое невозможно. Проследим, как меняется сумма номеров контейнеров, умноженных на количество шаров в них, при одном действии робота (например, изначально эта сумма равна 1 + 2 + 3 + 4 + · · · + 2024, а после того, как робот «поработает» с контейнерами 1 и 3, эта сумма будет равна 0 + 2 · 3 + 0 + 4 + · · · + 2024). Если не происходит перекладывания шарика из контейнера 1 в контейнер 2024 (или наоборот), эта сумма сохраняется, в противном случае она изменяется на 2024. Значит, в результате всех перемещений шариков остаток суммы номеров контейнеров, умноженных на количество шаров в них, при делении на 2024 не изменился. В начальный момент времени этот остаток был равен 1 + 2 + · · · + 2024 = 2025

$\cdot$ 1012 ≡ 1012 (mod 2024), а в конечный момент времени – остатку суммы номеров контейнеров, содержащих шарики, умноженной на 8. Однако первый остаток не кратен 8, а второй кратен – противоречие. Значит, искомого алгоритма не существует.

***Задача 4.*** Зададим каждому из людей вопрос про каждого из остальных. Заметим, что люди, всегда говорящие правду, назовут ровно 100 других людей лжецами. А вот люди, которые всегда лгут, не могут назвать каких-то 100 других людей лжецами, потому что людей, говорящих правду и всё что угодно, суммарно меньше 100.
Рассмотрим только людей, которые про 100 каких-то других людей сказали, что те всегда лгут. Среди них должны найтись какие-то 50 людей, которые друг про друга сказали, что они говорят правду. Заметим, что в таком множестве могут быть только люди, которые всегда говорят правду. Действительно, лжецов там быть не может, так как мы их «отфильтровали» ещё на первом шаге. Если среди этих 50 людей встречаются всегда говорящие правду и говорящие что угодно, то люди, говорящие правду, сказали бы про остальных, что они говорят что угодно. Также все эти 50 человек не могут говорить что угодно, так как говорящих что угодно у нас всего 40.
Таким образом, мы найдём людей, говорящих правду, а дальше по их ответам узнаем всё про всех остальных.

***Задача 5.*** Пусть в десятичной записи числа $k$ было $x$ цифр. Тогда среди чисел, изначально записанных на доске, достаточно рассмотреть числа вида 999 . . . 9, записываемые девятками, количество которых не меньше $x$.
Рассмотрим одно такое число, записываемое с помощью $y$ девяток: $n$ = 999 . . . 9 = $10^y - 1$. Сумма цифр такого числа равна $9y$, при этом $kn = (10^y - 1)k = 10^y \cdot k - k$ – десятичная запись такого числа начинается с записи числа $k$ (если $k$ не кратно 10, то последняя цифра уменьшена на 1; если $k$ кратно 10, то можно отбросить нули, на которые оно оканчивается – они не влияют на сумму цифр числа $kn$), затем следует $y - x$ девяток, а затем – цифры, дополняющие каждую из первых $x$ цифр до 9.
Верность этого утверждения может быть продемонстрирована вычитанием из $10^y \cdot k$ числа $k$ «в столбик». После этого становится очевидным, что суммы цифр чисел $n$ и $kn$ равны, и разность этих сумм равна 0. Поскольку утверждение верно для любого $y \geq x$ и количество таких $y$ бесконечно, делаем вывод, что на доске окажется бесконечное количество нулей, что и требовалось доказать.
Например, если $k$ = 372, $y = 5 \geq 3$ (количество цифр десятичной записи $k$), то $n$ = 99999 и $kn$ = 372 · 99999 = 372 · $(10^5 - 1)$ = 37199628 с той же суммой цифр, что у числа 99999. Это же верно для любого $y \geq 3$.

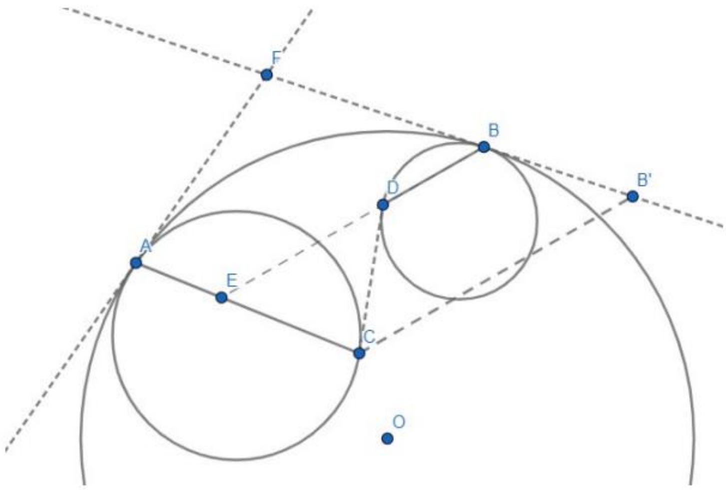
**8–9 класс**

***Задача 1.*** Пусть искомая градусная мера дуги $AB$ равна $\varphi$; $O$ – центр окружности $\Omega$. Касательные к этой окружности в точках $A$, $B$ будут касательными к окружностям $\omega_1$, $\omega_2$ (соответственно) и пересекутся в точке $F$. Поскольку $\angle OAF = \angle OBF = 90°$, из суммы углов четырехугольника $AOBF$ получим $\angle AFB = 180° - \varphi$.

Касательные, проведенные к окружности в концах одной хорды, составляют с этой хордой равные углы, поскольку отрезки этих касательных вместе с хордой образуют равнобедренный треугольник. Поэтому $\angle FAC = \angle DCA$ (обозначим этот угол за $\alpha$), аналогично $\angle FBD$ равен углу между прямой $CD$ и хордой $BD$ окружности $\omega_2$ (обозначим этот угол за $\beta$).

Пусть $E$ – точка пересечения прямых $AC$ и $BD$, тогда $\angle CDE = \beta$, и для углов треугольника $CDE$ имеем $\angle CED + \alpha + \beta = 180°$, откуда ввиду $\angle CDE = 55°$ получим $\alpha + \beta = 125°$.

Пусть $CB' \parallel DB$, где точка $B'$ лежит на прямой $FB$.




Тогда $\angle ACB' = \alpha + \beta$, и из суммы углов четырехугольника $ACB'F$ с учетом введенных обозначений получим $180° - \varphi + 2(\alpha + \beta) = 360°$, откуда $\varphi = 2(\alpha + \beta) - 180° = 2 \cdot 125° - 180° = 70°$.

***Задача 2.*** Докажем, что выиграет Боб, т. е. что в любой момент времени после хода Алисы он сможет сделать свой ход и не проиграть. Рассмотрим граф, возникающий перед ходом Боба. Поскольку он не содержит циклов нечетной длины, этот граф является двудольным. Пусть $a$ и $b$ – размеры его долей. Ясно, что проведение любого нового ребра между долями не приведет к поражению, поэтому, если Боб может провести такое ребро, он его проведет.

Предположим, что Боб не может сделать ход. Тогда перед его ходом возник полный двудольный граф $K_{a,b}$. Но поскольку $a+b = n$ – нечетно, числа $a$ и $b$ имеют разную четность, а количество проведенных ребер равно $ab$ – четно. Однако после хода Алисы проведено нечетное число ребер. Значит, после ее хода никак не может получиться полный двудольный граф. Поэтому Боб всегда сможет сделать непроигрывающий ход, а значит, он выиграет.

***Задача 3.*** По неравенству Коши-Буняковского-Шварца имеем
$x + xyz = x(1 + yz) = x(1 + (y - 1 + 1)(z - 1 + 1)) \geq (x - 1 + 1)(1 + (\sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2) \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2$
Таким образом,

$$\begin{cases} \mathrm{x} + \mathrm{xyz} \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2 \\ \mathrm{y} + \mathrm{xyz} \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2 \\ \mathrm{z} + \mathrm{xyz} \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2 \end{cases}$$

Сложив эти неравенства и поделив обе части полученного неравенства на 3, получим требуемое.

***Задача 4.*** Сначала в общей камере математикам надо присвоить всем индивидуальные номера от 0 до ($n$−1). Пусть людоед рассадил математиков по камерам с номерами $k_0, \ldots, k_{n-1}$, где $k_i \in \{0, \ldots, n-1\}$ обозначает номер индивидуальной камеры, в которую посажен математик с номером $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.
Каждый математик $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ может подсчитать сумму $S_i = \sum_{j=0, j\neq i}^{n-1} k_j$, но не может подсчитать сумму $S = \sum_{j=0}^{n-1} k_j$, однако для каждого $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ имеем $k_i = S - S_i \equiv (S - S_i) \pmod n \equiv (S \pmod n) - S_i \pmod n) \pmod n$.
К сожалению, $S \pmod n$ никому из математиков не известно заранее, но пусть в качестве «кандидата» на $S \pmod n$ каждый математик называет свой собственный номер $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Таким образом за первую попытку все математики вместе переберут (так сказать, параллельно) все возможные варианты $(S \pmod n) \in \{0, \ldots, n-1\}$, и, следовательно хотя бы один математик будет освобожден у всех на глазах. Пусть номер этого математика $m \in \{0, \ldots, n-1\}$, и, следовательно, это число $m$ он назвал в качестве $S \pmod n$, поэтому во второй попытке каждому заключённому математику $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ в качестве номера камеры следует назвать $(m - (S_i \pmod n)) \pmod n$, чтобы спастись.

***Задача 5.*** Переведём задачу на язык графов: вершинами будут наши карточки с номерами от 1 до 16, а две вершины будем соединять ребром, если Вася указывал на данные две карточки и говорил их модуль разности. Рассмотрим случаи, какими могут быть компоненты связности данного графа. Предположим, что есть хотя бы две изолированные вершины (то есть две карточки, про которые ни разу ничего не говорили). В этом случае Петя не сможет расположить карточки в порядке возрастания/убывания, так как случаи, когда эти две карточки лежат в правильном порядке и когда эти две карточки поменяны местами, он различить не сможет. Противоречие.
Предположим, что есть компонента связности, состоящая из 2 вершин $i$ и $j$ (то

есть пара карточек, на которую Вася указывал, но больше ни на одну из этих двух карточек он не указывал). Аналогично прошлому случаю Петя не сможет расположить карточки в порядке возрастания/убывания, так как случаи, когда карточки $i$ и $j$ лежат в правильном порядке и когда эти они поменяны местами, Петя различить не сможет, ведь он про них знает только модуль их разности, а в этих случаях модуль разности одинаковый. Противоречие.
Итак, в графе на 16 вершинах максимум 1 изолированная вершина, а все другие компоненты связности имеют минимум 3 вершины. Значит, компонент связности максимум 6, а рёбер не менее $16 - 6 = 10$ (как известно, рёбер в графе не меньше количества вершин, уменьшенного на количество компонент связности). Тем самым, количество подсказок должно быть не менее 10.

Теперь приведём пример 10 подсказок, по которым Петя сможет расположить карточки в нужном порядке. Пусть Вася укажет на следующие пары:

$$(1, 16),(1, 14),(15, 3),(15, 4),(2, 12),(2, 11),(13, 6),(13, 7),(5, 10),(5, 9)$$

Со стороны Пети эти подсказки обозначим следующим образом: $(a_1, a_2, {}_{15})$,$(a_1, a_3, 13)$,$(a_4, a_5, 12)$,$(a_4, a_6, 11)$,$(a_7, a_8, 10)$,$(a_7, a_9, 9)$,$(a_{10}, a_{11}, 7)$,$(a_{10}, a_{12}, 6)$, $(a_{13}, a_{14}, 5)$,$(a_{13}, a_{15}, 4)$, где $a_i$ – это обозначение карточек, а третье число – это модуль разности чисел на двух данных карточках.
Покажем, как Пете по этим данным расположить карточки в нужном порядке. Для этого он будет последовательно выкладывать карточки на позиции с 1 по 16. По подсказке $(a_1, a_2, 15)$ Петя понимает, что на карточках $a_1$ и $a_2$ должны быть написаны числа 1 и 16. Тогда пусть Петя положит $a_1$ на первую позицию, $a_2$ – на 16-ю и тогда по второй подсказке понятно, что $a_3$ должно лежать на 14-й позиции:

$$a_1, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, a_3, \text{o}, a_2$$

Есть два варианта, какие именно числа написаны на выложенных карточках: 1, о, о, о, о, о, о, о, о, о, о, о, о, 14, о, 16 или 16, о, о, о, о, о, о, о, о, о, о, о, о, 3, о, 1. По подсказке $(a_4, a_5, 12)$ Петя понимает, что карточки $a_4$ и $a_5$ должны лежать на позициях 3 и 15 (для любых других двух позиций модуль разности будет меньше 12), причём по следующей подсказке $(a_4, a_6, 11)$ можно понять, что $a_4$ не может лежать на 3-й позиции (иначе карточка $a_6$ должна была бы попасть на 14-ю позицию, которая занята). Получаем, что карточки $a_4$, $a_5$, $a_6$ однозначно попадают на позиции 15, 3, 4 соответственно:

$$a_1, \text{o}, a_5, a_6, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, a3, a4, a2$$

Есть два варианта, какие именно числа написаны на выложенных карточках: 1, о, 3, 4, о, о, о, о, о, о, о, о, о, 14, 15, 16 или 16, о, 14, 13, о, о, о, о, о, о, о, о, о, 3, 2, 1. Аналогично далее по подсказкам $(a_7, a_8, 10)$ и $(a_7, a_9, 9)$ понимаем, что $a_7$, $a_8$, $a_9$ стоят на позициях 2, 12, 11 соответственно:

$$a_1, a_7, a_5, a_6, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, \text{o}, a_9, a_8, \text{o}, a_3, a_4, a_2$$

Есть два варианта, какие именно числа написаны на выложенных карточках: 1, 2, 3, 4, о, о, о, о, о, о, 11, 12, о, 14, 15, 16 или 16, 15, 14, 13, о, о, о, о, о, о, 6, 5, о, 3, 2, 1.
Проводя те же рассуждения ещё два раза для пар подсказок $(a_{10}, a_{11}, 7)$, $(a_{10},$

$a_{12}$, 6) и ($a_{13}$, $a_{14}$, 5), ($a_{13}$, $a_{15}$, 4), Петя выложит карточки в порядке

$$a_1, a_7, a_5, a_6, a_{13}, a_{11}, a_{12}, \text{o}, a_{15}, a_{14}, a_9, a_8, a_{10}, a_3, a_4, a_2$$

Опять же, есть два варианта, какие именно числа написаны на выложенных карточках: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, о, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 или 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, о, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Осталось положить последнюю карточку $a_{16}$ (которую Вася не упоминал) на 8-ю позицию, и тогда в полученном ряду

$$a_1, a_7, a_5, a_6, a_{13}, a_{11}, a_{12}, a_{16}, a_{15}, a_{14}, a_9, a_8, a_{10}, a_3, a_4, a_2$$

числа от 1 до 16 будут идти либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания.

## 10–11 класс

***Задача 1.*** Обозначим через $O_{ij}$ точку пересечения боковых сторон трапеции $A_iB_iA_jB_j$. Тогда точка $O_{ij}$ является центром гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей отрезок $A_iB_i$ в отрезок $A_jB_j$. По теореме о трех центрах гомотетии точки $O_{ij}$, $O_{jk}$, $O_{ki}$ лежат на одной прямой. Обозначим эту прямую через $l_{ijk}$ и докажем, что все такие прямые лежат в одной плоскости.
Для этого будем последовательно рисовать их. Сначала проведем прямые $l_{123}$ и $l_{124}$: они лежат в одной плоскости $\pi$, т. к. пересекаются в точке $O_{12}$. Прямая $l_{134}$ пересекает $l_{123}$ в точке $O_{13}$, а прямую $l_{124}$ – в точке $O_{14}$, поэтому она также лежит в плоскости $\pi$. Наконец, прямая $l_{234}$ пересекает прямую $l_{123}$ в точке $O_{23}$, а прямую $l_{124}$ – в точке $O_{24}$, так что и она лежит в плоскости $\pi$.
Итак, все четыре прямые лежат в одной плоскости, и в ней же лежат все шесть точек $O_{ij}$, что и требовалось доказать.

***Задача 2.*** Заметим, что $R_n = (10^n-1)/9$. Так как числа 9 и 41 взаимно просты, то $R_n$ кратно 41 тогда и только тогда, когда $10^n - 1$ кратно 41. Поскольку 41 – простое, согласно малой теореме Ферма $10^{40} - 1$ кратно 41. Рассмотрим все натуральные $d$, при которых $10^d - 1$ кратно 41; наименьшее такое $d$ обозначим за $m$.
Если $n$ делится на $m$, то $10^n - 1 = 10^{tm} - 1 = (10^m - 1)(10^{(t-1)m} + 10^{(t-2)m} + \cdots + 10^m + 1)$, т.е. $10^n - 1$ делится на $10^m - 1$, а значит, и на 41, что и требовалось.
В обратную сторону: если $10^n-1$ кратно 41, то рассмотрим НОД($10^n-1$, $10^m-1$). Воспользуемся известным свойством наибольшего общего делителя: НОД($a$, $b$) = НОД($a-kb$, $b$) для натуральных $a$, $b$, $k$. Теперь
НОД($10^n - 1$, $10^m - 1$) = НОД($10^n - 1 - 10^{n-m}(10^m - 1)$, $10^m - 1$),
НОД($10^n - 1 - 10^n + 10^{n-m}$, $10^m - 1$) = НОД($10^{n-m} - 1$, $10^m - 1$).
Повторяя эти действия, убеждаемся, что в конце получается число $10^{\text{НОД}(n,m)} - 1$.
Если $n$ не делится на $m$, то НОД($n$, $m$) < $m$, а значит, $m$ – не минимальное натуральное число, при котором $10^m-1$ кратно 41 – противоречие. Значит, $n$ кратно $m$, что и требовалось доказать.

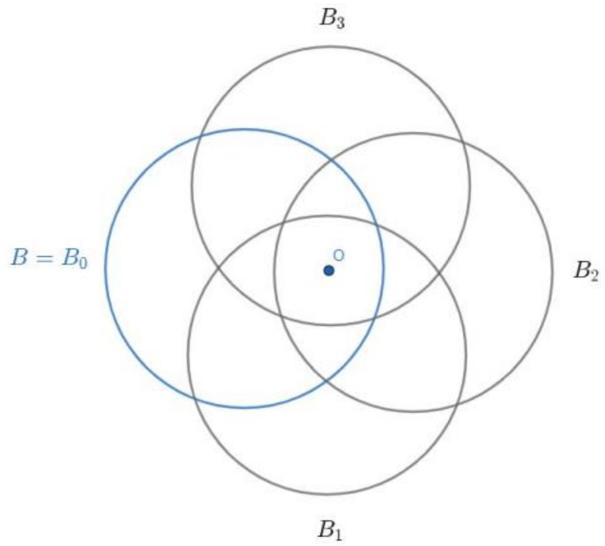
***Задача 3.*** Пусть $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ – элементарные симметрические многочлены и $s_n = a^n + b^n + c^n$. Воспользуемся формулой Ньютона

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}$$

Докажем, что $D_n = 1, 2, 3$ или 6. Предположим, что существуют такие взаимно простые в совокупности $a, b, c$, что $D_n$ отличен от 1, 2, 3, 6. Докажем, что тогда $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ имеют общий делитель, больший 1. В самом деле, из формул Ньютона следует, что при разложении $s_n$ через $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ моном, не содержащий $\sigma_1$ и $\sigma_2$, с точностью до знака имеет вид $3\sigma^{n/3}{}_3$. Поэтому если $D_n$ делит $s_1 = \sigma_1$ и $D_n$ делит $s_2 = \sigma^2{}_1 - 2\sigma_2$, то $D_n$ делит $\sigma_1$, $2\sigma_2$, $3\sigma_3$.
При $D_n$, отличном от 1, 2, 3, 6 у чисел $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ есть общий делитель, больший 1. Пусть $p$ – простой множитель, входящий в этот делитель. Тогда $p$ делит $abc$, откуда (без ограничения общности) $p$ делит $a$. Но тогда $p$ делит $(ab + bc + ca)$ и $p$ делит $bc$, т.е. (без ограничения общности) $p$ делит $b$. Наконец, из того, что $p$ делит $(a + b + c)$, получаем, что $p$ делит $c$ – противоречие с $(a, b, c) = 1$.
Итак, $D_n = 1, 2, 3$ или 6. Наборы (1, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 4, 7) реализуют $D_n = 2, 3$ и 6. Для $D_n = 1$ возьмем простое число $p > 3$ и положим $a = b = 1$, $c = p - 2$. Тогда $a + b + c = p$ и $p$ не делит $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 4p + 6$, откуда $D^n = 1$.

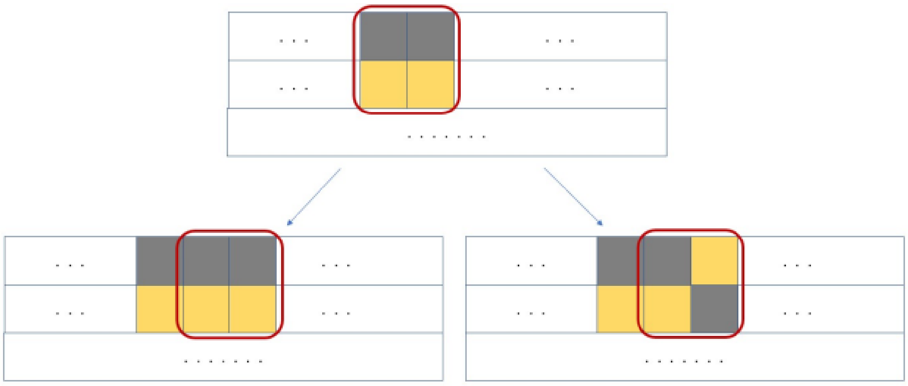
***Задача 4.*** Рассмотрим нарисованные окружности как плоский мультиграф (граф с кратными ребрами между вершинами): вершины – точки пересечений, ребра – дуги нарисованных окружностей, ограниченные точками пересечений. В такой интерпретации круглосторонники – это все грани этого графа, кроме «внешней» (т. е. части плоскости, лежащей вне всех окружностей).
Пусть нарисованы ровно $m$ окружностей. Согласно формуле Эйлера для плоских графов, $V - E + F = 2$, где $V$ – число вершин графа, $E$ – число ребер, а $F$ – число граней (включая внешнюю). Так как каждая пара окружностей пересекается ровно в двух своих уникальных точках, то число вершин $V = 2 \cdot m(m-1)/2 = m(m - 1)$. Так как каждая вершина – это точка пересечения ровно двух окружностей, то наш граф является регулярным степени 4 (то есть в каждую вершину входят ровно 4 ребра). Поскольку каждое ребро соединяет две вершины, общее число ребер $E = 4V/2 = 2V = 2m(m - 1)$. Следовательно число граней нашего плоского мультиграфа должно быть равно $F = 2 + E - V = 2 + 2m(m - 1) - m(m - 1) = 2 + m(m - 1)$. Так как число круглосторонников $C = F - 1$, имеем $C = 1 + m(m - 1)$.
Найти наименьшее $m$, такое, что $C \geq 2023$ – значит найти наименьшее натуральное решение неравенства $m^2 - m - 2022 \geq 0$. Такое число легко найти хоть подбором, хоть решая квадратное неравенство: $m = 46$. (Проверка еще проще: $45 \cdot 44 + 1 = 1981 < 2023 < 2071 = 46 \cdot 45 + 1$.)
Теперь заметим, что для любого $m \geq 1$ (в том числе для $m = 46$) можно расположить $m$ окружностей на плоскости так, что каждая пара пересекается ровно в двух своих уникальных точках. Действительно, нарисуем произвольную окружность $B$ на плоскости и выберем произвольную точку $O$ внутри нее (но не являющуюся ее центром), а потом рассмотрим $m$ окружностей $B_k$, $0 \leq k \leq (m - 1)$, которые получаются в результате поворота

окружности $B$ вокруг точки $O$ на угол $2\pi k/m$ (окружность $B_0$ совпадает с $B$). На рисунке приведен пример для $m = 4$.




Теперь докажем, что обязательно найдется круглосторонник, ограниченный менее чем 4-мя дугами. Предположим, что все круглосторонники ограничены не менее чем 4 дугами. Тогда общее число «сторон» (дуг, ограничивающих круглосторонники) не меньше, чем $4C = 4(1 + m(m - 1))$. Пусть $K$ – число границ внешней грани плоского мультиграфа, тогда $K+4C = K+4+4m(m-1) \leq 2m(m-1)$ (общее число ребер в нашем плоском графе), то есть $K + 4 + 2m(m - 1) \leq 0$, что невозможно, – следовательно, неверно предположение, что все круглосторонники ограничены не менее чем 4 дугами. Поэтому обязательно найдется круглосторонник, ограниченный менее чем 4 дугами, что и требовалось доказать.

***Задача 5.*** Для начала заметим, что в каждом квадрате $2 \times 2$ должно быть по две клетки каждого цвета. Рассмотрим раскраску самой верхней строки квадрата. Предположим, что в ней есть какие-то две соседние клетки одинакового цвета. Тогда, рассмотрев квадрат $2 \times 2$, содержащий эти клетки, получим, что две клетки под ними должны быть противоположного цвета. Если теперь сдвинуть этот квадрат на одну клетку вправо, получим, что в левом столбце две клетки противоположного цвета, поэтому и в правом столбце клетки тоже должны быть противоположного цвета. Сдвигая этот квадрат аналогично вправо и влево, получим, что вторая строка должна быть противоположна (по цветам) первой.



Если теперь проделать такие же рассуждения со второй и третьей строкой, получим, что третья строка должна быть противоположна второй (т. к. во второй также найдутся две рядом стоящие клетки одного цвета). Аналогично далее строки будут чередоваться, и вся таблица заполняется однозначно. Теперь поймём, при каких условиях на первую строку раскраска будет подходящей. Предположим, что в первой строке найдётся подстрока, в которой клеток одного из цветов хотя бы на $k > 2$ больше, чем другого. Такую подстроку можно сократить до подстроки $A$ длины $m$ так, чтобы разница была ровно 3 (т. к. при отбрасывании одной клетки разница меняется на 1). Рассмотрим квадрат $B$ размера $m \times m$, содержащий подстроку $A$. Так как в $A$ разница между цветами равна 3, то $m$ нечётно. Значит, в квадрате $B$ тоже разница между цветами будет равна 3, т. к. все его строки, кроме первой, можно разбить на пары противоположных (понятно, что если в подстроке разница между цветами больше 1, то в ней найдутся две соседние клетки одного цвета).

Таким образом, в первой строке не должно найтись подстроки, в которой клеток какого-то цвета хотя бы на 3 больше, чем другого. Предположим, что это условие выполнено, причём каждая строка, начиная со второй, противоположна предыдущей. Тогда в любом квадрате чётного размера цветов будет поровну, а в любом квадрате нечётного размера количество клеток разных цветов будет отличаться на 1, т. к. все строки в нём, кроме первой, разбиваются на пары, а в первой строке количество клеток разных цветов может отличаться только на 1.

Обозначим количество подходящих раскрасок первой строки за $x$. Тогда количество подходящих раскрасок всей доски будет равно $x - 2 + x = 2x - 2$. Действительно, в первой строке будет либо чередование цветов (2 варианта), либо где-то встретятся две клетки одинакового цвета. Во втором случае всё остальное определяется однозначно, а в первом всё определяется раскраской первого столбца (если и в первой строке, и в первом столбце не будет двух стоящих рядом клеток одного цвета, то с помощью последовательного рассмотрения квадратов $2 \times 2$ мы получим, что раскраска должна быть шахматной).

Теперь осталось найти $x$. Заметим, что трёх подряд идущих клеток одного цвета быть не может, т. к. эти три клетки уже дают подстроку с разницей 3.

Найдём в строке первый момент, когда рядом встретились две клетки одного цвета. Найдём следующий момент, когда рядом встретятся две клетки одного цвета. Если это тот же самый цвет, то в минимальной подстроке, содержащей обе эти пары, разница цветов будет равна 3, чего быть не может. Значит, это должны быть клетки другого цвета. Таким образом, блоки из пар клеток одного цвета должны чередоваться, а ещё между этими блоками могут быть участки чётной длины из чередующихся клеток. Тогда для расположения блоков может быть два варианта: либо их первые клетки расположены на нечётных местах, либо на чётных.

В первом случае разобьём все клетки на пары подряд идущих. На месте каждой пары может быть либо блок из двух одинаковых клеток, либо пара разных клеток. По набору мест блоков и цвету самой левой клетки цвета всех остальных клеток определяются однозначно. Таким образом, вариантов в этом случае $2 \cdot 2^{50} = 2^{51}$. В случае, когда первые клетки блоков располагаются на чётных позициях, есть всего 49 мест для блоков, и цвета всех клеток также определяются наборами мест блоков и цветом самой левой клетки. В этом случае вариантов $2 \cdot 2^{49} = 2^{50}$. При этом те варианты, где блоков вообще нет, мы посчитали дважды. Таких вариантов 2 (когда цвета чередуются). Значит, $x = 2^{51} + 2^{50} - 2$.

Получаем ответ: $2x - 2 = 2^{52} + 2^{51} - 6 = 3 \cdot 2^{51} - 6$.

# Предметный указатель