Пи-теорема в физике и математике

Александр Гасников (ректор университета Иннополис, проф. МФТИ)
gasnikov@yandex.ru

25 сентября, 2024

Теория подобия и размерностей

Задача 1 (о перекрытии реки). Пусть M обозначает массу камней, необходимых для перекрытия реки, если в единицу времени в реку засыпается масса m, характерный размер фиксированного профиля реки l, скорость течения v, ускорение свободного падения g, ρ – плотность воды. Докажите, что найдётся такая функция $\psi(\cdot,\cdot)$, что

$$M = m\sqrt{\frac{l}{g}}\psi\left(\frac{gl}{v^2}, \frac{m}{v\rho l^2}\right).$$

Задача 1 (о перекрытии реки). Пусть M обозначает массу камней, необходимых для перекрытия реки, если в единицу времени в реку засыпается масса m, характерный размер фиксированного профиля реки l, скорость течения v, ускорение свободного падения g, ρ – плотность воды. Докажите, что найдётся такая функция $\psi(\cdot,\cdot)$, что

$$M = m\sqrt{\frac{l}{g}}\psi\left(\frac{gl}{v^2},\frac{m}{v\rho l^2}\right).$$

Указание. Всего есть три базисные безразмерные комбинации: $\frac{m}{M}\sqrt{\frac{l}{g}}$, $\frac{gl}{v^2}$, $\frac{m}{v\rho l^2}$. Никаких других нет! Все остальные выражаются через эти три базисные. Действительно обозначим $сек=[1,0,0]$, $м=[0,1,0]$, $кг=[0,0,1]$. Тогда $M=[0,0,1]$, $m=[-1,0,1]$, $l=[0,1,0]$, $v=[-1,1,0]$, $g=[-2,1,1]$, $\rho=[0,-3,1]$. Нужно найти все такие решения $\vec{\alpha}$ – вектор

$$\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}\vec{\alpha}=\vec{0}.$$

Указание. Всего есть три базисные безразмерные комбинации: $\frac{m}{M}\sqrt{\frac{l}{g}}$, $\frac{gl}{v^2}$, $\frac{m}{v\rho l^2}$. Никаких других нет! Все остальные выражаются через эти три базисные. Действительно обозначим $сек=[1,0,0]$, $м=[0,1,0]$, $кг=[0,0,1]$. Тогда $M=[0,0,1]$, $m=[-1,0,1]$, $l=[0,1,0]$, $v=[-1,1,0]$, $g=[-2,1,1]$, $\rho=[0,-3,1]$.
Нужно найти все такие решения $\vec{\alpha}$ – вектор

$$\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}\vec{\alpha}=\vec{0}.$$

Несложно проверить, что фундаментальной матрицей этой системы будет

$$\begin{Vmatrix} -1; & 0; & 0 \\ 1; & 0; & 1 \\ 0.5; & 1; & -2 \\ 0; & -2; & -1 \\ -0.5; & 1; & 0 \\ 0; & 0; & -1 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда и следует базисность трех найденных безразмерных комбинаций.

Указание. Всего есть три базисные безразмерные комбинации: $\frac{m}{M}\sqrt{\frac{l}{g}}$, $\frac{gl}{v^2}$, $\frac{m}{v\rho l^2}$. Никаких других нет! Все остальные выражаются через эти три базисные. Действительно обозначим $сек=[1,0,0]$, $м=[0,1,0]$, $кг=[0,0,1]$. Тогда $M=[0,0,1]$, $m=[-1,0,1]$, $l=[0,1,0]$, $v=[-1,1,0]$, $g=[-2,1,1]$, $\rho=[0,-3,1]$. Нужно найти все такие решения $\vec{\alpha}$ – вектор

$$\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}\vec{\alpha}=\vec{0}.$$

Поэтому по основной теореме теории размерностей (П – теорема) найдётся такая функция $\varphi(\cdot,\cdot)$, что

$$\frac{m}{M}\sqrt{\frac{l}{g}}=\varphi\left(\frac{gl}{v^2},\frac{m}{v\rho l^2}\right) \Rightarrow M=m\sqrt{\frac{l}{g}}\psi\left(\frac{gl}{v^2},\frac{m}{v\rho l^2}\right), \text{где } \psi(\cdot,\cdot)=\varphi(\cdot,\cdot)^{-1}.$$

Зорич В.А. Математический анализ задач естествознания. М. МЦНМО, 2008, стр. 16.
Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967.

Приложения в биофизике

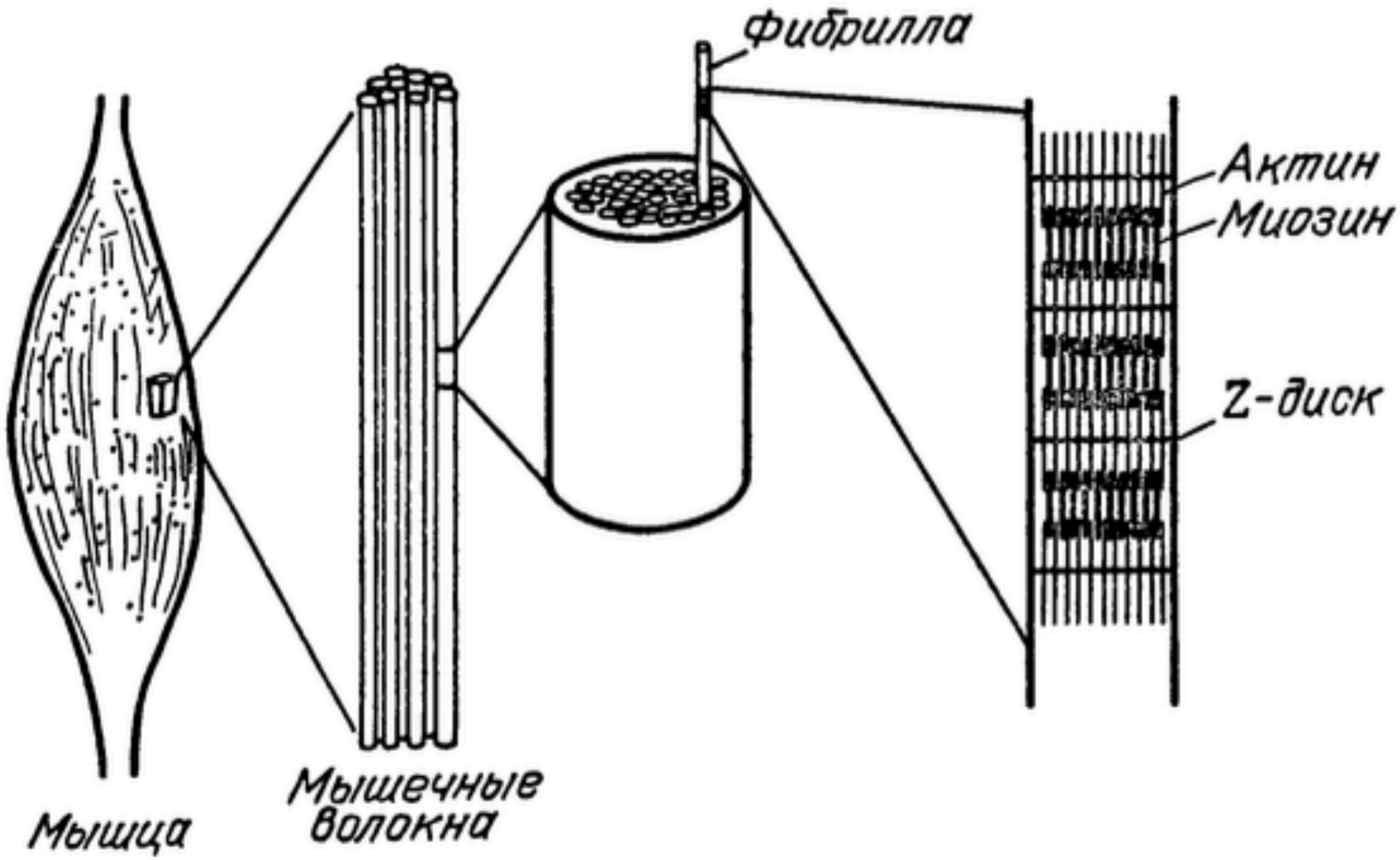

Рис. 70. Структура скелетной мышцы

Почему кузнечик и человек одинаково прыгают

Предположим теперь, что мы располагаем группой животных, подобных во всех отношениях и отличающихся друг от друга только своей массой (см. рис. 71). Пусть масса одного из этих животных M, а масса мышцы, сокращение которой приводит тело в движение, CM, где C – постоянная для всей этой группы животных. Если единица массы мышцы способна выполнить работу a, то работа, выполняемая всей мышцей,

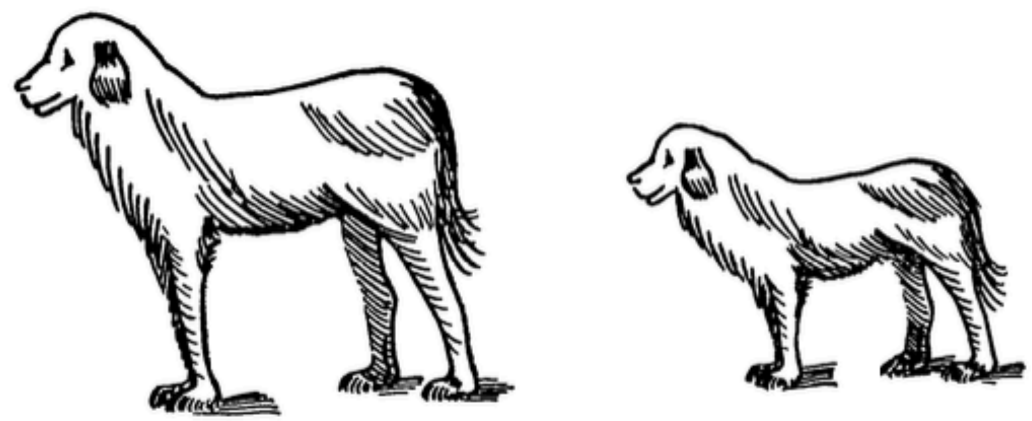

Рис. 71 Подобные животные

равна aCM. Пусть эта работа идет на то, чтобы придать скорость v части тела с массой C_1M, где C_1 – другая постоянная для той же группы животных. Очевидно, что для придания скорости v массе C_1M необходимо затратить энергию $C_1Mv^2/2$. Приравнивая эту энергию работе, совершенной мышцей, получаем

$$\frac{C_1Mv^2}{2} = aCM,$$

откуда

$$v = \sqrt{2aC/C_1}. \qquad (32)$$

Почему кузнечик и человек одинаково прыгают

$$\frac{C_1 M v^2}{2} = aCM,$$

откуда

$$v = \sqrt{2aC/C_1}. \qquad (32)$$

Из выражения (32) следует, что подобные животные могут ускорять соответствующие части своих тел до одинаковых скоростей независимо от их масс. Применим это заключение к ногам животного: аналогичные животные могли бы ускорять свои конечности до одинаковых скоростей и, следовательно, бежать с одинаковой скоростью независимо от их размеров. Однако длина шага у каждого из этой группы подобных животных пропорциональна его линейным размерам, т. е. $\sqrt[3]{M}$. Поэтому частота шагов подобных животных, движущихся с одинаковой скоростью, должна быть прямо пропорциональна $(\sqrt[3]{M})^{-1}$. Конечно, такие количественные оценки нельзя в полной мере применять в сравнительном анализе движений мыши и слона хотя бы потому, что формы их тел далеки от подобия. В то же время приведенные рассуждения позволяют во многих случаях качественно объяснить связь между массой животного и образом его жизни.

Приложения в биофизике

Задача 2 (почему щука всегда догонит карася?). Найти отношение скоростей v_1/v_2, которые могут развивать две подобные рыбы (разных размеров), если отношение их характерных линейных размеров l_1/l_2.

Указание. Мощность, которую развивает рыба, в основном идет на преодоление работы силы сопротивления воды. Поскольку сама сила пропорциональна $F \sim Sv^2$ (скорость считаем довольно большой), то мощность $N \sim Sv^3 \sim l^2v^3$. С другой стороны, хорошо известно, что сила создаваемая мышцей напрямую зависит от её площади, следовательно, вырабатываемая мощность прямо пропорциональна объему мышцы. Таким образом, $N \sim V \sim l^3$. Следовательно, $v_1/v_2 = \sqrt[3]{l_1/l_2}$.

Постарайтесь на таком же уровне грубости объяснить, почему частота шагов подобных животных, движущихся с одинаковой скоростью пропорциональна $M^{-1/3}$, почему одинаковые по форме животные подпрыгивают на одинаковую высоту, почему зависимость между массой подобных животных и массой потребляемого ими кислорода в единицу времени Q имеет вид $Q \sim M^{2/3}$.

Богданов К.Ю. Физика в гостях у биолога. М.: Б-ка Квант, вып. 49. 1986.
Bogdanov Konstantin Biology in physics. Is life matter? Academic Press, 2000.
Физика и … М.: Б-ка Квант, вып. 87. 2001.
Богданов К.Ю. Прогулки с физикой. М.: Б-ка Квант, вып. 98. 2006. http://kbogdanov4.narod.ru/

Когда ходьба переходит в бег

Известно, что тело, движущееся со скоростью v по окружности радиуса l, имеет ускорение, направленное к центру этой окружности и равное v^2/l. При ходьбе на человека действуют

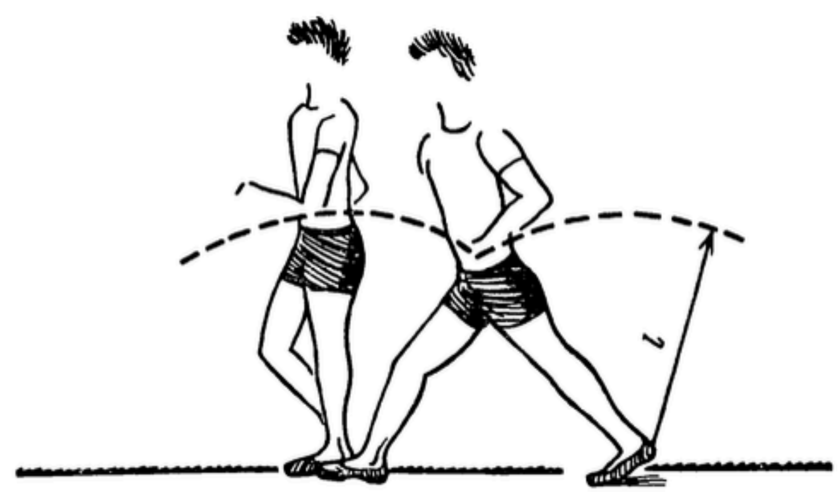

Рис 72. Изменение положения центра тяжести при ходьбе (показано штрихом)

две силы – сила тяжести и сила реакции опоры. Результирующая этих двух сил и является искомой центростремительной силой. Очевидно, что ее величина не может быть больше силы тяжести. Поэтому при ходьбе должно соблюдаться неравенство $mv^2/l \leqslant mg$, где m – масса идущего человека. Из этого неравенства следует

$$v \leqslant \sqrt{gl}. \qquad (37)$$

Длина ноги взрослого человека составляет около 0,9 м. Подставляя это значение для l в (37), получаем для максимальной скорости ходьбы человека значение около 3 м/с, что согласуется с реальным ее значением. У детей ноги короче, чем у взрослых, и максимальная скорость ходьбы меньше. Поэтому для того, чтобы не отставать на прогулке от взрослых, детям часто приходится переходить на бег. Интересно, что такие же соотношения между максимальной скоростью ходьбы и длиной конечностей имеют место и у четвероногих животных.

Пи-теорема в математике

$$\min_{x \in Q} f(x).$$

$$x_{k+1} = x_k - h\nabla f(x_k).$$

$$R = \|x_0 - x^*\|_2$$

$$\|\nabla f(x)\|_2 \leqslant M$$

$$f(\bar{x}_N) - f(x^*) \leqslant \varepsilon$$

Пи-теорема в математике

Можно ввести размерности и в численные методы оптимизации (и, на самом деле, часто бывает весьма полезно это делать для контроля правильности получаемых формул). А именно, предположим, что целевая функция измеряется в рублях [руб]. То есть ε [руб], а аргумент функции рассчитывается в килограммах [кг], т.е. x [кг]. Тогда R [кг], M [руб/кг], количество итераций N — безразмерная величина. Шаг субградиентного метода h [кг^2/руб] — это следует из (2.14).

Считая, что N может зависеть только от R, M, ε, из П-теоремы сразу можно заключить, что существуют такие числа const и α, что $N = \text{const} \cdot (MR/\varepsilon)^{\alpha}$. Это, конечно, не готовый ответ, но хорошо согласуется с полученным выше результатом $N = M^2R^2/\varepsilon^2$.

$$N = \frac{M^2R^2}{\varepsilon^2}, \quad h = \frac{\varepsilon}{M^2}$$