Каждый участник получает комплект из 6 задач, при этом каждая из них случайным образом выбирается из 4-х вариантов. Представлены решения для одного из четырех вариантов, остальные решаются аналогично.

Первые 4 задачи подразумевают краткий числовой ответ. Если число в ответе имеет больше двух цифр после десятичной запятой, то это число требуется округлить до сотых. Задачи под номерами 5 и 6 требуют развернутого решения и точного (т.е. без округлений) ответа.

Each participant gets a set of 6 tasks, with each of them randomly selected from 4 versions. Solutions are presented for one of the four versions, the rest are solved similarly.

The first 4 tasks imply a short numerical answer. If the number in the answer has more than two digits after the decimal point, then this number must be rounded to 2 decimal digits. Tasks numbered 5 and 6 require a detailed solution and an precise (i.e. without rounding) answer.

7^{th} degree

Task 1.

1. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 99 пиратов, то доля капитана в таком случае составит 51 монета; а если же он выберет 77 пиратов, то его доля будет уже 29 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 1000?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

   Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 99 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 51 coins; and if he chooses 77 pirates, the captain's share will be 29 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 1000?

   Answer: 645

2. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 81 пирата, то доля капитана в таком случае составит 64 монет; а если же он выберет 99 пиратов, то его доля будет уже 19 монет. Известно, что число монет меньше 800. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 800?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 81 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 64 coins; and if he chooses 99 pirates, the captain's share will be 19 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 800?

Answer: 712

3. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 143 пирата, то доля капитана в таком случае составит 61 монета; а если же он выберет 88 пиратов, то его доля будет уже 39 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 1400?

Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 143 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 61 coins; and if he chooses 88 pirates, the captain's share will be 39 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 1400?

Answer: 919

4. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 91 пират, то доля капитана в таком случае составит 87 монет; а если же он выберет 77 пиратов, то его доля будет уже 17 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 950?

Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 91 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 87 coins; and if he chooses 77 pirates, the captain's share will be 17 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 950?

Answer: 633

Solution (RUS). Пусть в первом случае награда каждого пирата равна t, а во втором - s. Тогда общая награда равна соответсвенно $99t+51$ и $77s+29$. По условию в обоих случаях награда одинаковая, больше 0 и меньше 1000. Имеем $99t+51=77s+29$.

Во-первых получаем, что $99t+51<1000$, то есть $99t<949$ или $t<\dfrac{949}{99}=9\dfrac{50}{99}$. Так как t - целое, то имеем $0<t\leq 9$. Во-вторых, упрощая равенство, получаем $99t+22=77s$, что можно сократить еще раз, поделив на 11. Получаем $9t+2=7s$.
Перебрав варианты t от 0 до 9, находим, что только при $t=6$ полученное число делится 7, чтобы справа могло получится выражение $7s$. Итого получается, что $t=6, s=8$, а само число равно 645.

Solution (ENG). Let each pirate's reward be t in the first case, and s in the second. Then the total reward is $99t+51$ and $77s+29$, respectively. According to the condition, in both cases the reward is the same, more than 0 and less than 1000. We have $99t+51=77s+29$.
First, we get that $99t+51<1000$, that is, $99t<949$ or $t<\frac{949}{99}=9\frac{50}{99}$. Since t is an integer, we have $0<t\leq 9$. Secondly, simplifying the equality, we get $99t+22=77s$, which can be reduced again by dividing by 11. We get $9t+2=7s$.
After going through the options t from 0 to 9, we find that only when $t=6$ the resulting number is divisible by 7, so that the expression $7s$ can be obtained on the right. In total, it turns out that $t=6, s=8$, and the number itself is 645.

Task 2.

1. Клетчатую таблицу размером 6×6 вырезали из листа бумаги и склеили у нее противоположные стороны. Какое максимально возможное количество коней можно расставить на такой доске, чтобы никакие два коня не били друг друга?

   A 6×6 checkered table was cut out of a sheet of paper and its opposite sides were glued together. What is the maximum possible number of chess knights that can be placed on such a board so that no two knights beat each other?

   Answer: 18

2. Клетчатую таблицу размером 8×8 вырезали из листа бумаги и склеили у нее противоположные стороны. Какое максимально возможное количество коней можно расставить на такой доске, чтобы никакие два коня не били друг друга?

   A 8×8 checkered table was cut out of a sheet of paper and its opposite sides were glued together. What is the maximum possible number of chess knights that can be placed on such a board so that no two knights beat each other?

   Answer: 32

3. Клетчатую таблицу размером 10×10 вырезали из листа бумаги и склеили у нее противоположные стороны. Какое максимально возможное количество коней можно расставить на

такой доске, чтобы никакие два коня не били друг друга?

A 10×10 checkered table was cut out of a sheet of paper and its opposite sides were glued together. What is the maximum possible number of chess knights that can be placed on such a board so that no two knights beat each other?

Answer: 50

4. Клетчатую таблицу размером 12×12 вырезали из листа бумаги и склеили у нее противоположные стороны. Какое максимально возможное количество коней можно расставить на такой доске, чтобы никакие два коня не били друг друга?

   A 12×12 checkered table was cut out of a sheet of paper and its opposite sides were glued together. What is the maximum possible number of chess knights that can be placed on such a board so that no two knights beat each other?

   Answer: 72

Solution (RUS). Заметим, что можно расставить коней на белых клетках, и никакие два коня друг друга не побьют. Докажем, что больше 32 коней расставить не получится. Действительно, каждый конь бьет ровно 8 клеток, и каждую клетку бьет не более 8 коней, поэтому k коней, не бьющих друг друга, занимают k клеток и бьют не более $\frac{8k}{8} = k$ клеток. Поэтому $k + k \leq 64 \implies k \leq 32$.

Заметьте, что для доски $m \times n$ ответ будет $\frac{[mn]}{2}$, где $[a]$ обозначает целую часть числа a.

Solution (ENG). Notice that it's possible to place the knights at all white squares so that they would not attack each other. Let's now show that it's not possible to place more than 32 knights. Since each knight attacks 8 squares (not less, not more), then k knights attack no more than $\frac{8k}{8} = k$ squares. Hence, $k + k \leq 64 \implies k \leq 32$.

Note that for for desk $m \times n$ the answer would be $\frac{[mn]}{2}$, where $[a]$ denotes whole part of number a.

Task 3.

1. В стране несколько городов, некоторые пары которых соединены дорогам. Известно, что всего 2025 дорог, и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Какое максимальное количество дорог, никакие две из которых не выходят из одного города, гарантированно можно найти?

   There are several towns in a kingdom, some pairs of which are connected via roads. It is known that there are 2025 roads total and in any group of three roads you can choose two, which do not come from the same town. What is the largest number of roads are guaranteed to be found, no two of which come from the same towns?

   Answer: 810

2. В стране несколько городов, некоторые пары которых соединены дорогам. Известно, что всего 2000 дорог, и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного

города. Какое максимальное количество дорог, никакие две из которых не выходят из одного города, гарантированно можно найти?

There are several towns in a kingdom, some pairs of which are connected via roads. It is known that there are 2000 roads total and in any group of three roads you can choose two, which do not come from the same town. What is the largest number of roads are guaranteed to be found, no two of which come from the same towns?

Answer: 800

3. В стране несколько городов, некоторые пары которых соединены дорогам. Известно, что всего 1915 дорог, и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Какое максимальное количество дорог, никакие две из которых не выходят из одного города, гарантированно можно найти?

   There are several towns in a kingdom, some pairs of which are connected via roads. It is known that there are 1915 roads total and in any group of three roads you can choose two, which do not come from the same town. What is the largest number of roads are guaranteed to be found, no two of which come from the same towns?

   Answer: 766

4. В стране несколько городов, некоторые пары которых соединены дорогам. Известно, что всего 1875 дорог, и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Какое максимальное количество дорог, никакие две из которых не выходят из одного города, гарантированно можно найти?

   There are several towns in a kingdom, some pairs of which are connected via roads. It is known that there are 1875 roads total and in any group of three roads you can choose two, which do not come from the same town. What is the largest number of roads are guaranteed to be found, no two of which come from the same towns?

   Answer: 750

Solution (RUS). Заметим, что из любого города выходят или 0, или одна, или две дороги. Значит, все города распадаются на одиночно стоящие, цепи и циклы. Также заметим, что треугольных циклов нет. Теперь отметим, что в каждой цепи можно взять не менее половины дорог, а в каждом цикле - не менее $2/5$ дорог, поскольку если в цикле k дорог, то при четном k мы берем $k/2$ дорог, а при нечетном k – $(k-1)/2$, что не меньше $\frac{2}{5}k$ при $k \geq 5$. Пример дается циклами длины 5.

Solution (ENG). Note that either 0, or one, or two roads come out of any city. So all cities break up into singles, chains, and cycles. Also note that there are no triangular cycles. Now note that in each chain we can take at least half of the roads, and in each cycle we can take at least $2/5$ of the roads, because if a cycle has k roads, then for even k we take $k/2$ roads, and for odd k we take $(k-1)/2$, which is not less than $\frac{2}{5}k$ at $k \geq 5$. An example can be given by cycles of length 5.

Task 4.

1. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^7 - n$ для любого натурального n.

   Find greatest common factor for all numbers of type $n^7 - n$ for any positive integer n.

   Answer: 42

2. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^{13} - n$ для любого натурального n.

   Find greatest common factor for all numbers of type $n^{13} - n$ for any positive integer n.

   Answer: 2730

3. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^{19} - n$ для любого натурального n.

   Find greatest common factor for all numbers of type $n^{19} - n$ for any positive integer n.

   Answer: 798

4. Найдите наибольший общий делитель всех чисел вида $n^{25} - n$ для любого натурального n.

   Find greatest common factor for all numbers of type $n^{25} - n$ for any positive integer n.

   Answer: 2730

Solution (RUS). Заметим, что искомый НОД делит число $2^7 - 2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$. Также НОД не делится на 9, т.к. на 9 не делится число $3^7 - 3$. Поэтому нод не больше $2 \cdot 3 \cdot 7$. Однако число $n^7 - n$ делится и на 2, и на 3, и на 7 по малой теореме Ферма. Таким образом, наибольший общий делитель равен 42.

В остальных задачах принцип решения аналогичный: раскладывыем число $2^n - 2$ на множители, затем с помощью проверки делимости числа $3^n - 3$ отбрасываем 3^2 (и все остальные степени, больше первой, если они есть, например 2^2), а остальные делители проверяем с помощью малой теоремы Ферма и свойствами арифметики по модулю.

Solution (ENG). Note that the desired greatest common factor divides the number $2^7 - 2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$. Also, the greatest common factor is not divisible by 9, because the number $3^7 - 3$ is not divisible by 9. Therefore, the greatest common factor is no more than $2 \cdot 3 \cdot 7$. However, the number $n^7 - n$ is divisible by 2, 3, and 7 by Fermat's little theorem. Thus, the greatest common factor is 42.

For other tasks the principle of solution is the same: we factor the number $2^n - 2$, then we remove the divisors like 3^2 (and other divisors with degree higher than 1, if any, for example 2^2) with checking of $3^n - 3$. Other divisors are checked with Fermat's little theorem and properties of modular arithmetics.

Task 5.

1. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2022, образуя одно огромное число: 1234567891011...20212022. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 2022 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20212022. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3, then Ivan wins, otherwise, Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

2. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 1999, образуя одно огромное число: 1234567891011...19981999. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 1999 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...19981999. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3, then Ivan wins, otherwise, Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

3. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2077, образуя одно огромное число: 1234567891011...20762077. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 2077 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20762077. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3, then Ivan wins, otherwise, Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

4. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2007, образуя одно огромное число: 1234567891011...20062007. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 2007 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20062007. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3, then Ivan wins, otherwise, Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

Solution (RUS). Стратегия для Пети: пока есть цифры, делящиеся на 3, в свой ход Петя вычеркивает такую цифру. Далее, если ещё потребуется делать ходы, Петя вычеркивает цифры произвольно.

Заметим, что если Пете удастся добиться вычеркивания всех цифр, делящихся на 3 (такие мы далее будем называть хорошими), то финальное однозначное число не будет делиться на 3, а Ваня, соответственно, проиграет. Покажем, что Пете хватит ходов для этого. Сначала выясним общее число ходов (на двоих): это в точности количество цифр изначального числа.

Стратегия для Пети: пока есть цифры, делящиеся на 3, в свой ход Петя вычёркивает такую цифру. Далее, если ещё потребуется делать ходы, Петя вычёркивает цифры произвольно.

Заметим, что если Пете удастся добиться вычёркивания всех цифр, делящихся на 3 (такие мы далее будем называть хорошими), то финальное однозначное число не будет делиться на 3, а Ваня, соответственно, проиграет. Покажем, что Пете хватит ходов для этого.

Сначала выясним общее количество ходов (на двоих): это в точности количество цифр изначального числа. Это количество составлено из цифр однозначных чисел (которых 9 в записи), двузначных (которых 90), трёхзначных (их 900), и четырёхзначных (их 2022 - 999 = 1023). То есть всего количество цифр в записи изначального длинного числа (будем его называть шаблоном) равно $9+2{\cdot}90+3{\cdot}900+4{\cdot}1023 = 9+180+2700+4092 = 6981$.

Количество ходов же совпадает с количеством вычеркнутых чисел в конце, а их 6980 (так как осталось одно).

Покажем, что хороших цифр в записи шаблона менее половины от 6980 (то есть менее $6980/2 = 3490$). Для этого отдельно посчитаем количество таких цифр, которые получаются из однозначных чисел записи, из двузначных и так далее.

Заметим, что всего в записи чисел от 1 до 9 количество хороших цифр равно 3.

Среди двузначных чисел в записи шаблона количество хороших цифр на первой позиции (соответствующего числа) равно 3×10, так как на первой позиции, допустимы лишь хорошие цифры 3, 6 и 9 - всего три варианта. Для каждой из этих цифр встретятся все 10 вариантов второй цифры, то есть в разряде единиц. Аналогично вычисляем, что количество хороших цифр на вторых позициях двухзначных чисел в шаблоне равно 4×9. Итого, хороших цифр, полученных из двузначных чисел в записи шаблона, всего $3 \cdot 10 + 4 \cdot 9 = 30 + 36 = 66$.

Аналогично из трёхзначных чисел в шаблоне получаются $3 \cdot 100 + 4 \cdot 90 + 4 \cdot 90 = 300 + 360 + 360 = 1020$ хороших цифр.

Для четырёхзначных чисел также разделим подсчёт на две части: для чисел от 1000 до 1999 и для чисел от 2000 до 2022. В первой подгруппе во всех числах первая цифра не является хорошей, а количество хороших цифр среди этих тысячи чисел равно $4{\cdot}100{\times}3 = 1200$.

Во вторую подгруппу (от 2000 до 2023) попали 23 числа. Вручную проверяем, что количество хороших цифр в разряде тысяч равно 0 (все двойки), а в разряде сотен - равно 23 (все нули). В разряде десятков хороших цифр 10, а в разряде единиц 9. Итого из $4 \times 23 = 92$ цифр этих 23х чисел $23 + 10 + 9 = 42$ хороших.

Остаётся отметить, что в каждой из рассмотренных групп количество хороших цифр меньше половины:

в однозначных 3 из 9, в двузначных 66 из 180, в трёхзначных 1020 из 2700, в четырёхзначных в первой подгруппе 1200 из 4000, во второй подгруппе 42 из 92.

Таки образом, хороших цифр в шаблоне меньше количества ходов Пети, то есть он сможет вычеркнуть их все (кроме тех, которые вычеркнет Ваня) и гарантировать себе победу.

Solution (ENG). Strategy for Peter: as long as there are digits that divide by 3, on his turn Peter crosses out such a digit. Then, if Peter needs to make more moves, he crosses out the digits randomly.

Note that if Peter manages to cross out all digits divisible by 3 (we'll call such digits good), then the final single-digit number will not divide by 3, and Ivan, correspondingly, will lose. Let's show that Peter has enough moves for that.

First find the total number of moves (for two): this is exactly the number of digits of the initial number. It is the number of digits of one-digit numbers (of which there are 9 in the entry), two-digit numbers (of which there are 90), three-digit numbers (of which there are 900), and four-digit numbers (of which 2022 - 999 = 1023). So, the total number of digits in the original record of a long number (we will call it a pattern) is $9+2{\cdot}90+3{\cdot}900+4{\cdot}1023 = 9+180+2700+4092 = 6981$.

The number of moves coincides with the number of crossed out numbers at the end, and they are 6980 (since there is one left).

Let us show that the good numbers in the pattern entry are less than half of 6980 (that is, less than $6980/2 = 3490$). To do this, we separately count the number of such digits that are obtained from single-digit numbers in the record, from two-digit numbers, and so on.

Note that the total number of good digits in the record of numbers from 1 to 9 is 3.

Among two-digit numbers in the pattern, the number of good digits in the first position (the corresponding number) is 3×10 (as in the first position, only good numbers 3, 6 and 9 are allowed - a total of three options. For each of these digits will meet all 10 cases of the second digit. Similarly, calculate that the number of good digits on the second positions of two-digit numbers in the pattern is 4×9. So $3 * 10 + 4 * 9 = 30 + 36 = 66$ good digits obtained from the two-digit numbers in the pattern.

Similarly, the three-digit numbers in the template obtained $3 * 100 + 4 * 90 + 4 * 90 = 300 + 360 + 360 = 1020$ good numbers.

For four-digit numbers we will also divide the calculation into two parts: for numbers from 1000 to 1999 and for numbers from 2000 to 2022. In the first subgroup, the first digit is not good, and the number of good digits among these thousand numbers is $4*100\times 3 = 1200$.

In the second subgroup (from 2000 to 2023) only 23 numbers. Manually check that the number of good digits in the thousands division is 0 (all two), and in the hundreds division is 23 (all zeros). The number of good digits in the tens division is 10, and in the units division - 9. The total of $4 \times 23 = 92$ digits of these 23x numbers is $23 + 10 + 9 = 42$ good.

And we have 2331 good numbers and it is less than half. So Peter can cross them all out (except for those that Ivan crosses out) and guarantee victory.

Task 6.

1. Алиса и Боб играют в игру. Игровое поле представляет из себя клетчатую полоску размером 1×2022. Игроки по очереди (начинает Алиса) выписывают в пустую клетку любую из букв О и Г. Побеждает тот, после чьего хода в трех соседних клетках появятся буквы ОГО. Если все клетки заполнены, а слова ОГО нет, игра заканчивается вничью. Каков будет исход при правильной игре обоих соперников?

   Alice and Bob play a game. The gaming field is a checked line of size 1×2022. Players one by one write any of the letters W or O (the first to write is Alice). The person after which turn there would be a work WOW on the desk wins. If all cells are filled without WOW word, the players draw. How the game would end with a optimal play of both players?

2. Алиса и Боб играют в игру. Игровое поле представляет из себя клетчатую полоску размером 1×1111. Игроки по очереди (начинает Алиса) выписывают в пустую клетку любую из букв О и Г. Побеждает тот, после чьего хода в трех соседних клетках появятся буквы ОГО. Если все клетки заполнены, а слова ОГО нет, игра заканчивается вничью. Каков будет исход при правильной игре обоих соперников?

   Alice and Bob play a game. The gaming field is a checked line of size 1×1111. Players one by one write any of the letters W or O (the first to write is Alice). The person after which turn there would be a work WOW on the desk wins. If all cells are filled without WOW word, the players draw. How the game would end with a optimal play of both players?

3. Алиса и Боб играют в игру. Игровое поле представляет из себя клетчатую полоску размером 1×2048. Игроки по очереди (начинает Алиса) выписывают в пустую клетку любую из букв О и Г. Побеждает тот, после чьего хода в трех соседних клетках появятся буквы ОГО. Если все клетки заполнены, а слова ОГО нет, игра заканчивается вничью. Каков будет исход при

правильной игре обоих соперников?

Alice and Bob play a game. The gaming field is a checked line of size 1×2048. Players one by one write any of the letters W or O (the first to write is Alice). The person after which turn there would be a work WOW on the desk wins. If all cells are filled without WOW word, the players draw. How the game would end with a optimal play of both players?

4. Алиса и Боб играют в игру. Игровое поле представляет из себя клетчатую полоску размером 1×777. Игроки по очереди (начинает Алиса) выписывают в пустую клетку любую из букв О и Г. Побеждает тот, после чьего хода в трех соседних клетках появятся буквы ОГО. Если все клетки заполнены, а слова ОГО нет, игра заканчивается вничью. Каков будет исход при правильной игре обоих соперников?

   Alice and Bob play a game. The gaming field is a checked line of size 1×777. Players one by one write any of the letters W or O (the first to write is Alice). The person after which turn there would be a work WOW on the desk wins. If all cells are filled without WOW word, the players draw. How the game would end with a optimal play of both players?

Solution (RUS). Докажем, что Боб выиграет. Для этого ему нужно создать комбинацию $O[][]O$ ([] обозначает пустую клетку). Ясно, что не позднее чем за 2 хода он сможет это сделать, расположив сначала букву О на достаточно большом расстоянии от клетки Алисы и края доски, а вторым ходом — расположив букву О на расстоянии 2 клетки от своей первой буквы О (с одной из сторон, где он сможет это сделать, такая сторона всегда найдется). После этого момента он будет ждать, когда Алиса сделает свой ход в одну из клеток между его буквами О – тогда в любом случае можно будет дополнить до слова ОГО и победить. Алиса вынуждена будет это сделать, поскольку после любого ее хода на доске останется нечетное количество пустых клеток, а значит, найдется клетка, справа и слева от которой либо нет букв, либо есть обе буквы. Боб может поставить Г в эту клетку и не проиграет.

Для других вариантов, все зависит от четности количества клеток: если их четное количество, то выигрывает Боб. В противном случае – Алиса.

Solution (ENG). Let's prove that Bob would win. For that he should create combination $O[][]O$ ([] denotes empty cell). It's clear that no later than after 2 moves he would be able to do that: first he could put letter O far away from Alice's letter and borders, then he could put another letter O on one of the sides. After that he would wait until Alice would make a move between his letters O – then it would be always possible to complete this combination to WOW and win. This situation would happen since after any her move there would be odd amount of empty cells, hence there would be a cell which is surrounded by two empty cells or by two filled cells. In both situations there is a possibilty to choose the letter and don't lose.

For other variants, it depends on the parity of cells amount: if there are even amount of cells, then Bob wins. Otherwise – Alice wins.

8-9th degree

Task 1.

1. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 99 пиратов, то доля капитана в таком случае составит 51 монета; а если же он выберет 77 пиратов, то его доля будет уже 29 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 1000?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

   Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 99 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 51 coins; and if he chooses 77 pirates, the captain's share will be 29 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 1000?

   Answer: 645

2. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 81 пирата, то доля капитана в таком случае составит 64 монет; а если же он выберет 99 пиратов, то его доля будет уже 19 монет. Известно, что число монет меньше 800. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 800?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

   Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 81 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 64 coins; and if he chooses 99 pirates, the captain's share will be 19 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 800?

   Answer: 712

3. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды

(это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 143 пирата, то доля капитана в таком случае составит 61 монета; а если же он выберет 88 пиратов, то его доля будет уже 39 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 1400?

Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 143 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 61 coins; and if he chooses 88 pirates, the captain's share will be 39 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 1400?

Answer: 919

4. Пиратский закон гласит, что справедливый способ дележки добычи (состоящей из одинаковых золотых монет) такой: капитан определяет, кого из команды считает достойным награды (это как минимум один пират), и этим пиратам даёт максимально возможное одинаковое количество золотых монет из добычи. Остаток монет после такой делёжки - доля капитана.

   Капитан Крюк не может решить по какому из принципов выделить "достойных" награды. Например, если капитан выберет 91 пират, то доля капитана в таком случае составит 87 монет; а если же он выберет 77 пиратов, то его доля будет уже 17 монет. Сколько монет было в добыче, если известно, что это число меньше 950?

   Pirate law states that the fair way to share the loot (consisting of identical gold coins) is as follows: the captain determines which of the crew he considers worthy of the reward (this is at least one pirate), and these pirates are given the maximum possible equal number of gold coins from the loot. The rest of the coins after such a division is the captain's share.

   Captain Hook cannot decide on which principle to choose the "worthy" pirates. For example, if he picks 91 "worthy" pirates, the captain's share in this case is 87 coins; and if he chooses 77 pirates, the captain's share will be 17 coins. How many coins were in the loot if it is known that their amount is less than 950?

Answer: 633

Solution (RUS). Пусть в первом случае награда каждого пирата равна t, а во втором - s. Тогда общая награда равна соответсвенно $99t+51$ и $77s+29$. По условию в обоих случаях награда одинаковая, больше 0 и меньше 1000. Имеем $99t+51=77s+29$.

Во-первых получаем, что $99t+51<1000$, то есть $99t<949$ или $t<\frac{949}{99}=9\frac{50}{99}$. Так как t - целое, то имеем $0<t\leq 9$. Во-вторых, упрощая равенство, получаем $99t+22=77s$, что можно сократить еще раз, поделив на 11. Получаем $9t+2=7s$.
Перебрав варианты t от 0 до 9, находим, что только при $t=6$ полученное число делится 7, чтобы

справа могло получится выражение $7s$. Итого получается, что $t = 6, s = 8$, а само число равно 645.

Solution (ENG). Let each pirate's reward be t in the first case, and s in the second. Then the total reward is $99t+51$ and $77s+29$, respectively. According to the condition, in both cases the reward is the same, more than 0 and less than 1000. We have $99t + 51 = 77s + 29$.
First, we get that $99t + 51 < 1000$, that is, $99t < 949$ or $t < \frac{949}{99} = 9\frac{50}{99}$. Since t is an integer, we have $0 < t \leq 9$. Secondly, simplifying the equality, we get $99t + 22 = 77s$, which can be reduced again by dividing by 11. We get $9t + 2 = 7s$.
After going through the options t from 0 to 9, we find that only when $t = 6$ the resulting number is divisible by 7, so that the expression $7s$ can be obtained on the right. In total, it turns out that $t = 6, s = 8$, and the number itself is 645.

Task 2.

1. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ $(AD > BC)$ отмечена такая точка P, что $PC = 2 \cdot DP$. Через эту точку проведена прямая, параллельная AB, которая пересекает AD в точке R. Найдите площадь треугольника ABR, если площадь $ABCD$ равна 40, а $BC = RD$.

   On the side CD of trapezoid $ABCD$ (with its base AD being larger than base BC) there is a point P such that $PC = 2 \cdot DP$. Through this point drawn a line parallel to AB that intersects the base AD at point R. Find the area of triangle ABR while the area of the trapezoid $ABCD$ is equal to 40 and $BC = RD$.

   Answer: 24

2. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ $(AD > BC)$ отмечена такая точка P, что $PC = 2 \cdot DP$. Через эту точку проведена прямая, параллельная AB, которая пересекает AD в точке R. Найдите площадь треугольника ABR, если площадь $ABCD$ равна 80, а $BC = RD$.

   On the side CD of trapezoid $ABCD$ (with its base AD being larger than base BC) there is a point P such that $PC = 2 \cdot DP$. Through this point drawn a line parallel to AB that intersects the base AD at point R. Find the area of triangle ABR while the area of the trapezoid $ABCD$ is equal to 80 and $BC = RD$.

   Answer: 48

3. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ $(AD > BC)$ отмечена такая точка P, что $PC = 2 \cdot DP$. Через эту точку проведена прямая, параллельная AB, которая пересекает AD в точке R. Найдите площадь треугольника ABR, если площадь $ABCD$ равна 100, а $BC = RD$.

   On the side CD of trapezoid $ABCD$ (with its base AD being larger than base BC) there is a point P such that $PC = 2 \cdot DP$. Through this point drawn a line parallel to AB that intersects the base AD at point R. Find the area of triangle ABR while the area of the trapezoid $ABCD$ is equal to 100 and $BC = RD$.

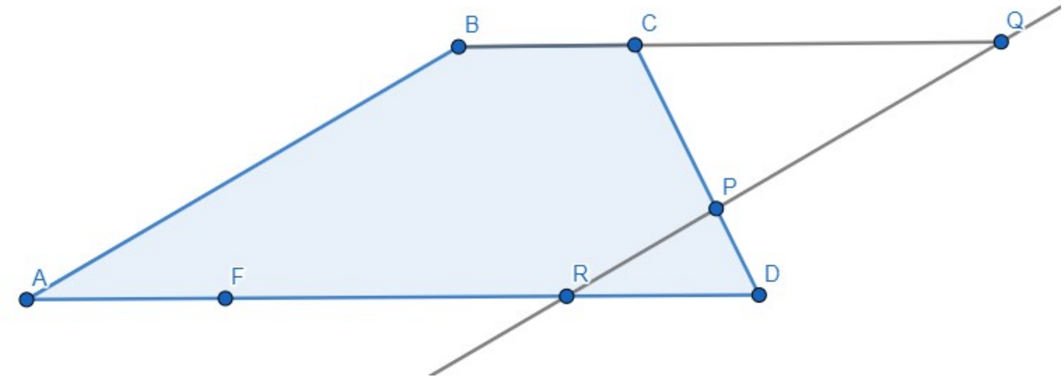
   Answer: 60

4. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ ($AD > BC$) отмечена такая точка P, что $PC = 2 \cdot DP$. Через эту точку проведена прямая, параллельная AB, которая пересекает AD в точке R. Найдите площадь треугольника ABR, если площадь $ABCD$ равна 60, а $BC = RD$.

On the side CD of trapezoid $ABCD$ (with its base AD being larger than base BC) there is a point P such that $PC = 2 \cdot DP$. Through this point drawn a line parallel to AB that intersects the base AD at point R. Find the area of triangle ABR while the area of the trapezoid $ABCD$ is equal to 60 and $BC = RD$.

Answer: 36

Solution (RUS). Обозначим как Q точку пересечения проведённой прямой RP с прямой BC. Тогда, по равенству соответствующих внутренних накрест лежащих углов, треугольники PDR и PCQ подобны друг другу с коэффициентом подобия 1 : 2 (так как этому равно отношение сторон PD к CP по условию). Тогда CQ = 2RD = 2BC.



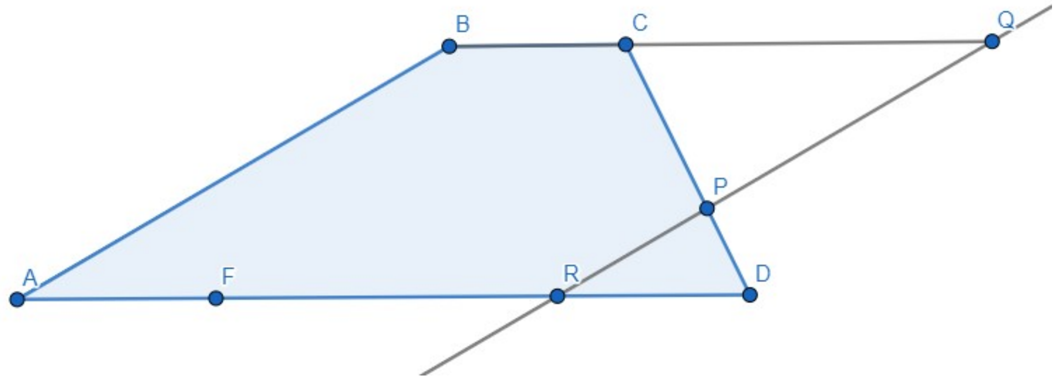
Заметим, что четырёхугольник ABQR по определению является параллелограммом (так как пары противоположных сторон параллельны). Значит, сторона AR равна стороне BQ, то есть AR = BC + CQ = 3RD.

Отметим такую точку F на основании AD, что BC = AF. Тогда ABCF также является параллелограммом (по признаку, так как AF и BC равны и параллельны). Кроме того, если отметить и соединить отрезком середины сторон CQ и FR параллелограмма FCQR, то становится очевидно, что он составлен из двух параллелограммов, каждый из которых совмещается с ABCF параллельным переносом (то есть они равны как геометрические фигуры). Значит, площадь параллелограмма CQRF в два раза больше площади параллелограмма ABCF.

Пусть площадь треугольника RPD равна S. Тогда так как, упоминалось ранее, треугольник PCQ подобен данному треугольнику PDR с коэффициентом 2, то площадь $S_{PCQ} = 2^2 \cdot s = 4 \cdot s$. Аналогично, легко видеть, что треугольник CDF подобен треугольнику PDR с коэффициэнтом 3. Значит, $S_{CDF} = 3^2 \cdot s = 9 \cdot s$. Таким образом, площадь параллелограмма FCQR равна $S_{FCQR} = S_{FCPR} + S_{PCQ} = S_{FCD} - S_{RPD} + S_{PCQ} = 9 \cdot s - s + 4 \cdot s = 12 \cdot s$.

Таким образом, как указано на два абзаца выше, $S_{ABCF} = S_{FCQR}/2$, что равно $6 \cdot s$ по результатам предыдущего абзаца. Остается заметить, что $S_{ABCD} = S_{ABCF} + S_{FCD} = 6 \cdot s + 9 \cdot s$, как было вычислено ранее. То есть $S_{ABCD} = 15 \cdot s = 40$, откуда $s = 40/15 = 8/3$.
Найти же требуется $S_{ABR} = (S_{ABQR}/2$, так как ABQR - параллелограмм, а BR его диагональ. То есть $S_{ABR} = (S_{ABCF} + S_{FCQR})/2 = (6 \cdot s + 12 \cdot s)/2 = 9 \cdot s$. Итого, искомая площади равна $S_{ABR} = 9 \cdot s = 9 \cdot (8/3) = 24$.

Solution (ENG). Denote by Q the point of intersection of the drawn line RP with line BC. Then, by equality of the corresponding internal crossover angles, the triangles PDR and PCQ are similar to each other with similarity coefficient 1:2(since this equals the ratio of the sides PD to CP by convention). Then CQ = 2RD = 2BC.



Note that the quadrilateral ABQR is by definition a parallelogram (since pairs of opposite sides are parallel). Thus the side AR is equal to the side BQ, i.e. AR = BC + CQ = 3RD.

Mark a point F on the base of AD such that BC = AF. Then ABCF is also a parallelogram (by the principle since AF and BC are equal and parallel). Besides, if we mark and connect by a segment the midpoints of sides CQ and FR of the FCQR parallelogram, then it becomes obvious that it is composed of two parallelograms, each of which is combined with ABCF by parallel transfer (that is, they are equal as geometrical figures). It means that the area CQRF is twice the area of the parallelogram ABCF.

Let the area of triangle RPD be S. Then since, as mentioned earlier, triangle PCQ is similar to triangle PDR with factor 2, the area $S_{PCQ} = 2^2 \cdot s = 4 \cdot s$. Similarly, it is easy to see that triangle CDF is similar to triangle PDR with factor 3. So $S_{CDF} = 3^2 \cdot s = 9 \cdot s$. Thus, the area of the FCQR parallelogram is $S_{FCQR} = S_{FCPR} + S_{PCQ} = S_{FCD} - S_{RPD} + S_{PCQ} = 9 \cdot s - s + 4 \cdot s = 12 \cdot s$.

Thus, as indicated two paragraphs above, $S_{ABCF} = S_{FCQR}/2$, which equals $6 \cdot s$ according to the results of the previous paragraph. It remains to be seen that $S_{ABCD} = S_{ABCF} + S_{FCD} = 6 \cdot s + 9 \cdot s$, as calculated earlier. That is, $S_{ABCD} = 15 \cdot s = 40$, whence $s = 40/15 = 8/3$.

Finding $S_{ABR} = (S_{ABQR}/2$, since ABQR is a parallelogram and BR is its diagonal. That is, $S_{ABR} = (S_{ABCF} + S_{FCQR})/2 = (6 \cdot s + 12 \cdot s)/2 = 9 \cdot s$. Total, the required area is $S_{ABR} = 9 \cdot s = 9 \cdot (8/3) = 24$.

Task 3.

1. Дана доска 6×6, раскрашенная в шахматном порядке. Сколькими способами можно поставить на белые клетки 9 шашек так, чтобы никакие две шашки не стояли бы на одной клетке и чтобы никакие две шашки не располагались бы в клетках, соседних по углу?

   Given a board with size 6×6 colored in a checkerboard pattern. How many ways to put 9 checkers on white cells of the board could there be, such that no two checkers would occupy the same cell and would not be located in cells adjacent by the corners?

   Answer: 20

2. Дана доска 8×8, раскрашенная в шахматном порядке. Сколькими способами можно поставить на белые клетки 16 шашек так, чтобы никакие две шашки не стояли бы на одной клетке и чтобы никакие две шашки не располагались бы в клетках, соседних по углу?

   Given a board with size 8×8 colored in a checkerboard pattern. How many ways to put 16 checkers on white cells of the board could there be, such that no two checkers would occupy the same cell and would not be located in cells adjacent by the corners?

Answer: 70

3. Дана доска 4×6, раскрашенная в шахматном порядке. Сколькими способами можно поставить на белые клетки 6 шашек так, чтобы никакие две шашки не стояли бы на одной клетке и чтобы никакие две шашки не располагались бы в клетках, соседних по углу?

   Given a board with size 4×6 colored in a checkerboard pattern. How many ways to put 6 checkers on white cells of the board could there be, such that no two checkers would occupy the same cell and would not be located in cells adjacent by the corners?

Answer: 10

4. Дана доска 6×8, раскрашенная в шахматном порядке. Сколькими способами можно поставить на белые клетки 12 шашек так, чтобы никакие две шашки не стояли бы на одной клетке и чтобы никакие две шашки не располагались бы в клетках, соседних по углу?

   Given a board with size 6×8 colored in a checkerboard pattern. How many ways to put 12 checkers on white cells of the board could there be, such that no two checkers would occupy the same cell and would not be located in cells adjacent by the corners?

Answer: 35

Solution (RUS). Разделим таблицу на квадраты 2×2. Ясно, что в каждом квадрате 2×2 есть ровно одна шашка. Поэтому нам нужно посчитать, сколькими способами можно расставить по одной шашке в каждый квадрат 2×2, чтобы клетки с шашками не граничили бы по углу.

Без ограничения общности будем считать, что у всех квадратов 2×2 правая нижняя клетка белая. Будет называть квадрат ПН-квадратом, если шашка стоит в правой нижней его клетке, и ЛВ-квадратом, если шашка стоит в левом верхнем углу.

Заметим, что если какой-то квадрат является ПН-квадратом, то и квадраты справа и снизу от него являются ПН-квадратами. Аналогичное верно и для ЛВ-квадратов. Таким образом, все ПН-квадраты образуют связную область, и все ЛВ-квадраты образуют связную область.

Ясно, что количество расстановок шашек зависит от количества способов разбить наш прямоугольник на две такие области. Линия границы между этими областями ведет из левого нижнего угла таблицы в правй верхний угол по линиям сетки. Количество способов провести такую линию равно соответствующему биномиальному коэффициенту $C_6^3 = 20$.

Solution (ENG). Split the given table into 2×2 cells. There can fit only a single checker inside of each such cell. Hence, we should calculate in how many ways we can place one checker inside each of these 2×2 cells, so that these cells with checkers would not be adjacent by their corners.

Without the loss of generality, assume that all these 2×2 squares' bottom-right cell is white. Let us denote a square as a BR-square if the checker is placed in the bottom-right cell of this square, and TL-square if the checker is placed in the top-left cell.

Notice, that if some square is a BR-square, then squares to the right and to the bottom of it are also BR-squares. The same is true for the TL-squares. Therefore, all BR-squares form a connected ares, and all TL-squares form a connected area.

It is clear, that the number of checkers permutations depends on the number of way to split the given board into two such areas. The border line between them starts from the board's bottom-left corner into top-right corner and it follows the lines of the grid. The number of ways to draw this border equals to the corresponding binomial coefficient $C_6^3 = 20$.

Task 4.

1. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{25} - x$ кратна n.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{25} - x$ is divisible by n.

   Answer: 31

2. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{21} - x$ кратна n.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{21} - x$ is divisible by n.

   Answer: 15

3. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{37} - x$ кратна n..

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{37} - x$ is divisible by n.

   Answer: 127

4. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{17} - x$ кратна n.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{17} - x$ is divisible by n.

   Answer: 15

Solution (RUS). Пусть $n = p^\alpha m$, где $(m, p) = 1, p-$ простое и $\alpha \geq 2$. Тогда подставим $x = p^{\alpha-1}m$ и получим сравнение $0 \equiv_n x$, что неверно. Значит, число n свободно от квадратов.
Пусть p - производный простой делитель числа n. Тогда $x^{24} \equiv_p 1$ для всех $x = 1..., p-1$. Но $x^{p-1} \equiv_p 1$ для этих x. Обозначим через d НОД(p - 1, 24).Тогда $x^d \equiv_p 1$ для всех $x = 1, ..., p-1$. Получается, что у уравнения $x^d - 1 \equiv_p 0$ есть p - 1 корень.

Значит, d = p - 1 и 24 $\vdots p-1$.

Итак, мы получаем, что для любого простого делителя p числа n имеет место делимость 24 $\vdots p-1$. Отсюда, p = 2,3,5,7,13. Таким образом, n является произведением каких-то из этих чисел. Итого получаем количество n, равное $2^5 - 1 = 31$ число.

Solution (ENG). Let $n = p^\alpha m$, where $(m, p) = 1, p-$ is prime and $\alpha \geq 2$. Then substitute $x = p^{\alpha-1}m$ and get a comparison of $0 \equiv_n x$, which is wrong. So the number n is free of squares.
Let p be the derived prime divisor of the number n. Then $x^{24} \equiv_p 1$ for all $x = 1..., p-1$. But $x^{p-1} \equiv_p 1$ for these x. Denote by d NOD(p - 1, 24).Then $x^d \equiv_p 1$ for all $x = 1, ..., p-1$. It turns out that the equation $x^d - 1 \equiv_p 0$ has a p - 1 root.

So d = p - 1 and 24 $\vdots p-1$.

So we obtain that for any prime divisor p of n there is a divisibility 24 $\vdots p-1$. Hence, p = 2,3,5,7,13. Thus, n is the product of some of these numbers. Total we get a number n equal to $2^5 - 1 = 31$ number.

Task 5.

1. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2022, образуя одно огромное число: 1234567891011...20212022. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 2022 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20212022. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3 then Ivan wins, otherwise Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

2. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 1999, образуя одно огромное число: 1234567891011...19981999. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

   On a tape all positive integers from 1 to 1999 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...19981999. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3 then Ivan wins, otherwise Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

3. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2077, образуя одно огромное число: 1234567891011...20762077. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

On a tape all positive integers from 1 to 2077 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20762077. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3 then Ivan wins, otherwise Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

4. На длинной ленте в ряд без пробелов записаны все натуральные числа от 1 до 2007, образуя одно огромное число: 1234567891011...20062007. Петя и Ваня по очереди вычёркивают цифры этого числа (вычёркнутую цифру запрещено вычеркивать второй раз). В конце игры остаётся однозначное число. Если оно делится на 3, то выигрывает Ваня, иначе – выигрывает Петя. Может ли кто-то обеспечить себе победу независимо от игры противника?

On a tape all positive integers from 1 to 2007 are written in a row without spaces, forming one huge number: 1234567891011...20062007. Peter and Ivan, one-by-one, are crossing out the digits of this number (it is forbidden to cross out the same digit twice). At the end of the game, a single digit remains. If it is divisible by 3 then Ivan wins, otherwise Peter wins. Can one secure victory for himself, regardless of the opponent's play?

Solution (RUS). Стратегия для Пети: пока есть цифры, делящиеся на 3, в свой ход Петя вычеркивает такую цифру. Далее, если ещё потребуется делать ходы, Петя вычеркивает цифры произвольно.

Заметим, что если Пете удастся добиться вычеркивания всех цифр, делящихся на 3 (такие мы далее будем называть хорошими), то финальное однозначное число не будет делиться на 3, а Ваня, соответственно, проиграет. Покажем, что Пете хватит ходов для этого. Сначала выясним общее число ходов (на двоих): это в точности количество цифр изначального числа.

Стратегия для Пети: пока есть цифры, делящиеся на 3, в свой ход Петя вычёркивает такую цифру. Далее, если ещё потребуется делать ходы, Петя вычёркивает цифры произвольно.

Заметим, что если Пете удастся добиться вычёркивания всех цифр, делящихся на 3 (такие мы далее будем называть хорошими), то финальное однозначное число не будет делиться на 3, а Ваня, соответственно, проиграет. Покажем, что Пете хватит ходов для этого.

Сначала выясним общее количество ходов (на двоих): это в точности количество цифр изначального числа. Это количество составлено из цифр однозначных чисел (которых 9 в записи), двузначных (которых 90), трёхзначных (их 900), и четырёхзначных (их 2022 - 999 = 1023). То есть всего количество цифр в записи изначального длинного числа (будем его называть шаблоном) равно $9+2\cdot90+3\cdot900+4\cdot1023 = 9+180+2700+4092 = 6981$.

Количество ходов же совпадает с количеством вычеркнутых чисел в конце, а их 6980 (так как осталось одно).

Покажем, что хороших цифр в записи шаблона менее половины от 6980 (то есть менее $6980/2 = 3490$). Для этого отдельно посчитаем количество таких цифр, которые получаются из однозначных чисел записи, из двузначных и так далее.

Заметим, что всего в записи чисел от 1 до 9 количество хороших цифр равно 3.

Среди двузначных чисел в записи шаблона количество хороших цифр на первой позиции (соответствующего числа) равно 3×10, так как на первой позиции, допустимы лишь хорошие цифры 3, 6 и 9 - всего три варианта. Для каждой из этих цифр встретятся все 10 вариантов второй цифры, то есть в разряде единиц. Аналогично вычисляем, что количество хороших цифр на вторых позициях двухзначных чисел в шаблоне равно 4×9. Итого, хороших цифр, полученных из двузначных чисел в записи шаблона, всего $3 \cdot 10 + 4 \cdot 9 = 30 + 36 = 66$.

Аналогично из трёхзначных чисел в шаблоне получаются $3 \cdot 100 + 4 \cdot 90 + 4 \cdot 90 = 300 + 360 + 360 = 1020$ хороших цифр.

Для четырёхзначных чисел также разделим подсчёт на две части: для чисел от 1000 до 1999 и для чисел от 2000 до 2022. В первой подгруппе во всех числах первая цифра не является хорошей, а количество хороших цифр среди этих тысячи чисел равно $4\cdot100\times3 = 1200$.

Во вторую подгруппу (от 2000 до 2023) попали 23 числа. Вручную проверяем, что количество хороших цифр в разряде тысяч равно 0 (все двойки), а в разряде сотен - равно 23 (все нули). В разряде десятков хороших цифр 10, а в разряде единиц 9. Итого из $4 \times 23 = 92$ цифр этих 23х чисел $23 + 10 + 9 = 42$ хороших.

Остаётся отметить, что в каждой из рассмотренных групп количество хороших цифр меньше половины:

в однозначных 3 из 9, в двузначных 66 из 180, в трёхзначных 1020 из 2700, в четырёхзначных в первой подгруппе 1200 из 4000, во второй подгруппе 42 из 92.

Таки образом, хороших цифр в шаблоне меньше количества ходов Пети, то есть он сможет вычеркнуть их все (кроме тех, которые вычеркнет Ваня) и гарантировать себе победу.

Solution (ENG). Strategy for Peter: as long as there are digits that divide by 3, on his turn Peter crosses out such a digit. Then, if Peter needs to make more moves, he crosses out the digits randomly.

Note that if Peter manages to cross out all digits divisible by 3 (we'll call such digits good), then the final single-digit number will not divide by 3, and Ivan, correspondingly, will lose. Let's show that Peter has enough moves for that.

First find the total number of moves (for two): this is exactly the number of digits of the initial number. It is the number of digits of one-digit numbers (of which there are 9 in the entry), two-digit numbers (of which there are 90), three-digit numbers (of which there are 900), and four-digit numbers (of which 2022 - 999 = 1023). So, the total number of digits in the original record of a long number (we will call it a pattern) is $9+2\cdot 90+3\cdot 900+4\cdot 1023 = 9+180+2700+4092 = 6981$.

The number of moves coincides with the number of crossed out numbers at the end, and they are 6980 (since there is one left).

Let us show that the good numbers in the pattern entry are less than half of 6980 (that is, less than $6980/2 = 3490$). To do this, we separately count the number of such digits that are obtained from single-digit numbers in the record, from two-digit numbers, and so on.

Note that the total number of good digits in the record of numbers from 1 to 9 is 3.

Among two-digit numbers in the pattern, the number of good digits in the first position (the corresponding number) is 3×10 (as in the first position, only good numbers 3, 6 and 9 are allowed - a total of three options. For each of these digits will meet all 10 cases of the second digit. Similarly, calculate that the number of good digits on the second positions of two-digit numbers in the pattern is 4×9. So $3 * 10 + 4 * 9 = 30 + 36 = 66$ good digits obtained from the two-digit numbers in the pattern.

Similarly, the three-digit numbers in the template obtained $3 * 100 + 4 * 90 + 4 * 90 = 300 + 360 + 360 = 1020$ good numbers.

For four-digit numbers we will also divide the calculation into two parts: for numbers from 1000 to 1999 and for numbers from 2000 to 2022. In the first subgroup, the first digit is not good, and the number of good digits among these thousand numbers is $4*100\times 3 = 1200$.

In the second subgroup (from 2000 to 2023) only 23 numbers. Manually check that the number of good digits in the thousands division is 0 (all two), and in the hundreds division is 23 (all zeros). The number of good digits in the tens division is 10, and in the units division - 9. The total of $4 \times 23 = 92$ digits of these 23x numbers is $23 + 10 + 9 = 42$ good.

And we have 2331 good numbers and it is less than half. So Peter can cross them all out (except for those that Ivan crosses out) and guarantee victory.

Task 6.

1. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 4x^2 + 4xy + 19y^2 \leq 2 \\ x - y \leq -1 \end{cases}$$

Solve the following system of inequalities:

$$\begin{cases} 4x^2+4xy+19y^2 \le 2 \\ x-y \le -1 \end{cases}$$

2. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 11x^2-10xy+3y^2 \le 3 \\ 5x+y \le -10 \end{cases}$$

Solve the following system of inequalities:

$$\begin{cases} 11x^2-10xy+3y^2 \le 3 \\ 5x+y \le -10 \end{cases}$$

3. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 11x^2+8xy+8y^2 \le 3 \\ x-4y \le -3 \end{cases}$$

Solve the following system of inequalities:

$$\begin{cases} 11x^2+8xy+8y^2 \le 3 \\ x-4y \le -3 \end{cases}$$

4. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 13x^2-4xy+4y^2 \le 2 \\ 2x-4y \le -3 \end{cases}$$

Solve the following system of inequalities:

$$\begin{cases} 13x^2-4xy+4y^2 \le 2 \\ 2x-4y \le -3 \end{cases}$$

Solution (RUS). (вариант 3) Выделим в первом неравенстве полные квадраты: $(x+2y)^2+2(3x)^2 \le 3$. Предположим $u=x+2y$, $v=3x$. Тогда $2u^2+v^2 \le 3$ и $v-2u \le -3$. Теперь домножим второе неравенство на 2 и сложим с первым: получим $2(u-1)^2+(v+1)^2 \le 0$, откуда $u=1, v=-1$ и $x=-\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}$.

(варианты 1,2,4) Выделим в первом неравенстве полные квадраты: $(2x+y)^2+2(3y)^2 \le 2$. Предположим $u=2x+y$, $v=3y$. Тогда $\frac{u^2}{2}+v^2 \le 1$ и $u-v \le -2$. В координатной системе относительной u, v первое неравенство можно изобразить в виде области внутри эллипса. Второе неравенство образует полуплоскость над прямой $v=u+2$.

Докажем, что эти две полуплоскости не имеют общих точек. Решим систему уравнений: $\begin{cases} v=u+2 \\ \frac{u^2}{2}+v^2-1=0 \end{cases}$

При подставлении первого во второе получаем $3u^2+8u+6=0$. Его дискриминант $D=b^2-4ac=64-72<0$, следовательно система не имеет действительных решений, предположение неверно, поэтому прямая и эллипс не имеют общих точек. Поэтому система неравеств не имеет действительных решений для u, v, а следовательно, и для x, y.

Solution (ENG). (version 3) In the first inequality group up the full squares: $(x+2y)^2+2(3x)^2 \leq 3$. Next, assume $u = x + 2y$, $v = 3x$. Hence, $2u^2 + v^2 \leq 3$ and $v - 2u \leq -3$. Next by multiplying the second inequality by 2 and adding it to the first one we obtain $2(u-1)^2+(v+1)^2 \leq 0$ and subsequently: $u = 1, v = -1$ and $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$.

(versions 1,2,4) In the first inequality group up the full squares: $(2x + y)^2 + 2(3y)^2 \leq 2$. Next, assume $u = 2x + y$, $v = 3y$. Hence, $\frac{u^2}{2} + v^2 \leq 1$ and $u - v \leq -2$. In the coordinate system relative to u, v the first inequality is a half-plane inside an ellipse, the second inequality forms a half-plane above the line $v = u + 2$.

Prove that these half-planes do not coincide. Lets solve the system of equations: $\begin{cases} v = u + 2 \\ \frac{u^2}{2} + v^2 - 1 = 0 \end{cases}$

Substituting the first into second yields $3u^2 + 8u + 6 = 0$. Its discriminant $D = b^2 - 4ac = 64 - 72 < 0$, therefore the system has no real solutions, the initial assumption was incorrect, hence the line and the ellipse do not have any common points.

These two half-planes are neither enclosed nor touching, therefore the given system has no real solutions for u, v and so for x, y.

10-12th degree

Task 1.

1. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{25} - x$ кратна n.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{25} - x$ is divisible by n.

   Answer: 31

2. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{21} - x$ кратна n.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{21} - x$ is divisible by n.

   Answer: 15

3. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{37} - x$ кратна n..

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{37} - x$ is divisible by n.

   Answer: 127

4. Найти количество натуральных чисел $n > 1$, для которых при любом натуральном x разность $x^{17} - x$ кратна n.

   Find the amount of integers $n > 1$ such that for any positive integer x the number $x^{17} - x$ is divisible by n.

   Answer: 15

Solution (RUS). Пусть $n = p^{\alpha}m$, где $(m, p) = 1, p-$ простое и $\alpha \geq 2$. Тогда подставим $x = p^{\alpha-1}m$ и получим сравнение $0 \equiv_n x$, что неверно. Значит, число n свободно от квадратов. Пусть p - производный простой делитель числа n. Тогда $x^{24} \equiv_p 1$ для всех $x = 1..., p-1$. Но $x^{p-1} \equiv_p 1$ для этих x. Обозначим через d НОД(p - 1, 24).Тогда $x^d \equiv_p 1$ для всех $x = 1, ..., p-1$. Получается, что у уравнения $x^d - 1 \equiv_p 0$ есть p - 1 корень.

Значит, d = p - 1 и 24 $\vdots p-1$.

Итак, мы получаем, что для любого простого делителя p числа n имеет место делимость 24 $\vdots p-1$.

Отсюда, p = 2,3,5,7,13. Таким образом, n является произведением каких-то из этих чисел. Итого получаем количество n, равное $2^5 - 1 = 31$ число.

Solution (ENG). Let $n = p^{\alpha}m$, where $(m, p) = 1, p-$ is prime and $\alpha \geq 2$. Then substitute $x = p^{\alpha-1}m$ and get a comparison of $0 \equiv_n x$, which is wrong. So the number n is free of squares.
Let p be the derived prime divisor of the number n. Then $x^{24} \equiv_p 1$ for all $x = 1..., p-1$. But $x^{p-1} \equiv_p 1$ for these x. Denote by d NOD(p - 1, 24).Then $x^d \equiv_p 1$ for all $x = 1, ..., p-1$. It turns out that the equation $x^d - 1 \equiv_p 0$ has a p - 1 root.

So d = p - 1 and 24 $\vdots p - 1$.

So we obtain that for any prime divisor p of n there is a divisibility 24 $\vdots p - 1$. Hence, p = 2,3,5,7,13. Thus, n is the product of some of these numbers. Total we get a number n equal to $2^5 - 1 = 31$ number.

Task 2.

1. Алиса и Боб играют в игру. На столе лежат k листов бумаги. Сначала Алиса пишет на каждом листе набор каких-то чисел от 1 до 2022 (на разных листах числа могут повторяться; также Алиса может не написать ни одного числа на каком-то листке или написать сразу все числа). Затем Алиса пишет на обратной стороне каждого листа все оставшиеся числа от 1 до 2022 (т.е. на каждом листе записаны все числа от 1 до 2022). Затем Боб переворачивает некоторые листы другой стороной вверх (он также может не перевернуть ни одного листа или пере- вернуть сразу все). Боб выигрывает, если на верхних сторонах всех листов будут записаны все числа от 1 до 2022. При каком наименьшем k Боб гарантированно сможет выиграть?

   Alice and Bob are playing a game. There are k sheets of paper on the table. First, Alice writes on each sheet a set of some numbers from 1 to 2022 (numbers can be repeated on different sheets; Alice can also leave an empty sheet or write all the numbers at once). Then Alice writes on the back of each sheet all the remaining numbers from 1 to 2022 (that is, each sheet contains all the numbers from 1 to 2022). Then Bob turns some of the sheets upside down (he can also turn none of the sheets, or turn them all over at once). Bob wins if all numbers from 1 to 2022 are written on the top sides of all sheets. What is the minimum k for which Bob is guaranteed to win?

   Answer: 11

2. Алиса и Боб играют в игру. На столе лежат k листов бумаги. Сначала Алиса пишет на каждом листе набор каких-то чисел от 1 до 2077 (на разных листах числа могут повторяться; также Алиса может не написать ни одного числа на каком-то листке или написать сразу все числа). Затем Алиса пишет на обратной стороне каждого листа все оставшиеся числа от 1 до 2077 (т.е. на каждом листе записаны все числа от 1 до 2077). Затем Боб переворачивает некоторые листы другой стороной вверх (он также может не перевернуть ни одного листа или пере- вернуть сразу все). Боб выигрывает, если на верхних сторонах всех листов будут записаны все числа от 1 до 2077. При каком наименьшем k Боб гарантированно сможет выиграть?

   Alice and Bob are playing a game. There are k sheets of paper on the table. First, Alice writes on each sheet a set of some numbers from 1 to 2077 (numbers can be repeated on different sheets; Alice can also leave an empty sheet or write all the numbers at once). Then Alice writes on the back of each sheet all the remaining numbers from 1 to 2077 (that is, each sheet contains all the numbers from 1 to 2077). Then Bob turns some of the sheets upside down (he can also turn none of the sheets, or turn them all over at once). Bob wins if all numbers from 1 to 2077 are written on the top sides of all sheets. What is the minimum k for which Bob is guaranteed to win?

Answer: 12

3. Алиса и Боб играют в игру. На столе лежат k листов бумаги. Сначала Алиса пишет на каждом листе набор каких-то чисел от 1 до 1005 (на разных листах числа могут повторяться; также Алиса может не написать ни одного числа на каком-то листке или написать сразу все числа). Затем Алиса пишет на обратной стороне каждого листа все оставшиеся числа от 1 до 1005 (т.е. на каждом листе записаны все числа от 1 до 1005). Затем Боб переворачивает некоторые листы другой стороной вверх (он также может не перевернуть ни одного листа или пере- вернуть сразу все). Боб выигрывает, если на верхних сторонах всех листов будут записаны все числа от 1 до 1005. При каком наименьшем k Боб гарантированно сможет выиграть?

   Alice and Bob are playing a game. There are k sheets of paper on the table. First, Alice writes on each sheet a set of some numbers from 1 to 1005 (numbers can be repeated on different sheets; Alice can also leave an empty sheet or write all the numbers at once). Then Alice writes on the back of each sheet all the remaining numbers from 1 to 1005 (that is, each sheet contains all the numbers from 1 to 1005). Then Bob turns some of the sheets upside down (he can also turn none of the sheets, or turn them all over at once). Bob wins if all numbers from 1 to 1005 are written on the top sides of all sheets. What is the minimum k for which Bob is guaranteed to win?

Answer: 10

4. Алиса и Боб играют в игру. На столе лежат k листов бумаги. Сначала Алиса пишет на каждом листе набор каких-то чисел от 1 до 5000 (на разных листах числа могут повторяться; также Алиса может не написать ни одного числа на каком-то листке или написать сразу все числа). Затем Алиса пишет на обратной стороне каждого листа все оставшиеся числа от 1 до 5000 (т.е. на каждом листе записаны все числа от 1 до 5000). Затем Боб переворачивает некоторые листы другой стороной вверх (он также может не перевернуть ни одного листа или пере- вернуть сразу все). Боб выигрывает, если на верхних сторонах всех листов будут записаны все числа от 1 до 5000. При каком наименьшем k Боб гарантированно сможет выиграть?

   Alice and Bob are playing a game. There are k sheets of paper on the table. First, Alice writes on each sheet a set of some numbers from 1 to 5000 (numbers can be repeated on different sheets; Alice can also leave an empty sheet or write all the numbers at once). Then Alice writes on the back of each sheet all the remaining numbers from 1 to 5000 (that is, each sheet contains all the numbers from 1 to 5000). Then Bob turns some of the sheets upside down (he can also turn none of the sheets, or turn them all over at once). Bob wins if all numbers from 1 to 5000 are written on the top sides of all sheets. What is the minimum k for which Bob is guaranteed to win?

Answer: 13

Solution (RUS). Докажем более общее утверждение: если даны числа от 1 до 2^n, то минимальное количество карточек, необходимое для выигрыша, равно n. То, что Боб выиграет на n карточках, следует из такого алгоритма. Он смотрит на первую карточку, и если на ней написано меньше половины чисел, он ее переворачивает. Теперь хотя бы половина чисел присутствует. Далее он смотрит на вторую карточку, и если на ней написана меньше половины из оставшихся чисел, он ее также переворачивает, и т.д. Таким образом, после каждого своего шага он уменьшает количество ненаписанных на карточках чисел как минимум в 2 раза. Значит, после n таких действий Боб добьется желаемого. То, что $n-1$ не хватит, можно доказать индукцией по n. Для этого занумеруем все числа в двоичной системе, и на первой карточке на одной стороне запишем числа, у которых первая цифра в двоичной системе равна 0, а на другой – у которых равна 1. На второй карточке – у которых вторая цифра равна 0 или 1, и т.д. Тогда, убирая первую карточку, например, с числами, начинающимися на 1, мы оставим $n-2$ карточки и $2^{n-1}-1$ чисел, начинающихся на 0, что дает возможность применить предположение индукции. База индукции очевидна. В нашем случае нужно взять в качестве ответа $k = \lceil \log_2 2022 \rceil = 11$.

Solution (ENG). Lets prove a more general statement: if the numbers from 1 to 2^n are given, then the minimum the minimum number of cards needed to win is n. It follows from this algorithm that Bob will win on n cards. He looks at the first card, and if less than half of the numbers are written on it, he turns it. Now at least half of the numbers are present. Next, he looks at the second card, and if it has less than half of the remaining numbers written on it, he turns it, and so on. Thus, after each step he reduces the number of numbers not written on the cards by at least 2 times. So, after n of such actions Bob will get what he wants. The fact that n - 1 is not enough can be proved by induction on n. To do this, we will number all the numbers in binary, and on the first card, on one side, write the numbers whose first digit in binary is 0, and on the other side, those whose first digit is 1. On the second card, write numbers whose second digit equals 0 or 1, and so on. Then, removing the first card, for example, with numbers beginning with 1, we will leave n - 2 cards and 2^{n-1}-1 numbers beginning with 0, allowing us to apply the induction assumption. The basis of induction is obvious. In our case, the answer is $k = \lceil \log_2 2022 \rceil = 11$.

Task 3.

1. На шахматной доске 6×6 расставлены ладьи так, что они бьют все черные клетки. Какое наибольшее возможное количество непобитых белых клеток может быть?

   Some chess rooks are placed on a 6×6 board so that they beat all the black cells. What is the largest possible number of unbeaten white cells?

   Answer: 9

2. На шахматной доске 8×8 расставлены ладьи так, что они бьют все черные клетки. Какое наибольшее возможное количество непобитых белых клеток может быть?

   Some chess rooks are placed on a 8×8 board so that they beat all the black cells. What is the largest possible number of unbeaten white cells?

   Answer: 16

3. На шахматной доске 10×10 расставлены ладьи так, что они бьют все черные клетки. Какое наибольшее возможное количество непобитых белых клеток может быть?

   Some chess rooks are placed on a 10×10 board so that they beat all the black cells. What is the largest possible number of unbeaten white cells?

   Answer: 25

4. На шахматной доске 12×12 расставлены ладьи так, что они бьют все черные клетки. Какое наибольшее возможное количество непобитых белых клеток может быть?

   Some chess rooks are placed on a 12×12 board so that they beat all the black cells. What is the largest possible number of unbeaten white cells?

   Answer: 36

Solution (RUS). Рассмотрим белую непобитую клетку доски 6×6. Поскольку в одной строке с ней есть не более 3 черных клеток, каждую из которых должна бить какая-то ладья, то в соответствующих столбцах стоит хотя бы одна ладья. Аналогично, в одном столбце с непобитой белой клеткой есть не более 3 черных клеток, каждую из которых должна бить какая-то ладья, то в соответствующих строках стоит хотя бы одна ладья. Значит, есть не менее 3 целиком побитых столбцов и не менее 3 целиком побитых строк. Значит, останется не более 3 целиком непобитых столбцов и не более 3 целиком непобитых строк. На их пересечении будет не более 9 непобитых белых клеток.

Легко привести пример, показывающий точность нашей оценки: поставьте ладью в одну из угловых белых клеток. Затем поставьте по 2 ладьи через 1 и через 3 клетки в строке и в столбце выбранной угловой клетки.

Solution (ENG). Consider the white unbroken cell of the 6×6 board. Since there are no more than 3 black cells in the same row with it, each of which must be beaten by some rook, then there is at least one rook in the corresponding columns. Similarly, in one column with an unbroken white cell there are no more than 3 black cells, each of which must be beaten by some rook, then there is at least one rook in the corresponding rows . This means that there are at least 3 completely broken columns and at least 3 completely broken rows. This means that there will be no more than 3 completely unbroken columns and no more than 3 completely unbroken lines. At their intersection there will be no more than 9 unbroken white cells.

It is easy to give an example showing the accuracy of our estimate: put a rook in one of the corner white squares. Then put 2 rooks through 1 and through 3 cells in the row and column of the selected corner cell.

Task 4.

1. Дана колода из 11 карт. Разрешается тасовать колоду следующими способами.
   1) Снять любое количество карт с верха колоды и не меняя их порядка положить под низ колоды.
   2) Снять 5 карт с верха колоды и не меняя их порядка положить в промежутки между оставшимися 6 картами.
   Какое количество различных положений карт в колоде можно получить, выполняя эти тасовки?

   A deck of 11 cards is given. It is allowed to shuffle the deck in the following ways.
   1) Remove any number of cards from the top of the deck and put them under the bottom of the deck without changing their order.
   2) Remove 5 cards from the top of the deck and put them in the gaps between the remaining 6 cards without changing their order.
   How many different positions of cards in the deck can be obtained by performing these shuffles?

Answer: 110

2. Дана колода из 13 карт. Разрешается тасовать колоду следующими способами.
1) Снять любое количество карт с верха колоды и не меняя их порядка положить под низ колоды.
2) Снять 6 карт с верха колоды и не меняя их порядка положить в промежутки между оставшимися 7 картами.
Какое количество различных положений карт в колоде можно получить, выполняя эти тасовки?

A deck of 13 cards is given. It is allowed to shuffle the deck in the following ways.
1) Remove any number of cards from the top of the deck and put them under the bottom of the deck without changing their order.
2) Remove 6 cards from the top of the deck and put them in the gaps between the remaining 7 cards without changing their order.
How many different positions of cards in the deck can be obtained by performing these shuffles?

Answer: 156

3. Дана колода из 15 карт. Разрешается тасовать колоду следующими способами.
1) Снять любое количество карт с верха колоды и не меняя их порядка положить под низ колоды.
2) Снять 7 карт с верха колоды и не меняя их порядка положить в промежутки между оставшимися 8 картами.
Какое количество различных положений карт в колоде можно получить, выполняя эти тасовки?

A deck of 15 cards is given. It is allowed to shuffle the deck in the following ways.
1) Remove any number of cards from the top of the deck and put them under the bottom of the deck without changing their order.
2) Remove 7 cards from the top of the deck and put them in the gaps between the remaining 8 cards without changing their order.
How many different positions of cards in the deck can be obtained by performing these shuffles?

Answer: 210

4. Дана колода из 17 карт. Разрешается тасовать колоду следующими способами.
1) Снять любое количество карт с верха колоды и не меняя их порядка положить под низ колоды.
2) Снять 8 карт с верха колоды и не меняя их порядка положить в промежутки между оставшимися 9 картами.
Какое количество различных положений карт в колоде можно получить, выполняя эти тасовки?

A deck of 17 cards is given. It is allowed to shuffle the deck in the following ways.
1) Remove any number of cards from the top of the deck and put them under the bottom of the deck without changing their order.

2) Remove 8 cards from the top of the deck and put them in the gaps between the remaining 9 cards without changing their order.
How many different positions of cards in the deck can be obtained by performing these shuffles?

Answer: 272

Solution (RUS). Пусть количество карт в колоде равно $2n+1$. Обозначим через μ_k первую тасовку, где снимается k верхних карт, а через λ - вторую тасовку. Заметим, что $\mu_l \mu_k = \mu_{l+k}$, $\lambda^{2n} = 1$ и $\lambda \mu_k \lambda^{-1} = \mu_l$, где $l \equiv_{2n+1} (n+1)k$. Поэтому любая комбинация перестановок λ и μ_k сводится к комбинациям вида $\mu_t \lambda^{2n-1}, \ldots, \mu_t \lambda$ и μ_t, причем все такие перестановки различны. Ясно, что перестановок каждого вида ровно $2n$ а всего их $2n+1$. Итого получаем $2n(2n+1)$.

Solution (ENG). Let the number of cards in the deck be $2n+1$. Denote by μ_k the first shuffle, where k of the top cards are removed, and by λ - the second shuffle. Note that $\mu_l \mu_k = \mu_{l+k}$, $\lambda^{2n} = 1$ and $\lambda \mu_k \lambda^{-1} = \mu_l$, where $l \equiv_{2n+1} (n+1)k$. Therefore, any combination of permutations λ and μ_k reduces to combinations of the form $\mu_t \lambda^{2n-1}, \ldots, \mu_t \lambda$ and μ_t, and all such permutations are different. It is clear that there are exactly $2n$ permutations of each kind, and there are $2n+1$ in total. In total, we get $2n(2n+1)$.

Task 5.

1. Муха села на верхнюю кромку цилиндрической кружки (без ручки) и поползла по её наружной стенке вниз под углом к вертикали и горизонтали. Оказалось, что весь свой путь до стола муха перемещалась с постоянными вертикальной и угловой скоростями (угловая скорость в данной ситуации измеряется в ортогональной проекции на поверхность стола относительно центра проекции кружки). Также оказалось, что муха совершила два полных оборота вокруг кружки и коснулась поверхности стола в точности под точкой, из которой свой путь начала. Натуралист Коля заинтересовался траекторией перемещения мухи и наклеил полосу липкой ленты ширины 2*см* поверх пути мухи так, что середина полосы идёт в точности по этому пути, обрезав эту полосу вдоль верхнего и нижнего краёв кружки. Определите площадь наклеенного куска липкой ленты, если высота кружки 7*см*, а радиус $4/\pi$ *см*.

   A fly landed on the upper edge of a cylindrical mug (without a handle) and crawled down its outer wall at an angle to the vertical and horizontal. It turned out that the fly moved all the way to the table with constant vertical and angular velocities (the angular velocity in this situation is measured in an orthogonal projection on the surface of the table relative to the center of the projection of the mug). It also turned out that the fly made two full turns around the mug and touched the surface of the table exactly under the point from which it started its journey. Naturalist Kolya became interested in the trajectory of the fly and pasted a strip of sticky tape width 2 *cm* on top of the fly path so that the middle of the strip goes exactly along this path, cutting this strip along the upper and lower edges of the circle. Determine the area of the glued piece of sticky tape if the height of the circle is 7 *cm*, and the radius is $4/\pi$ *cm*.

2. Муха села на верхнюю кромку цилиндрической кружки (без ручки) и поползла по её наружной стенке вниз под углом к вертикали и горизонтали. Оказалось, что весь свой путь до стола муха перемещалась с постоянными вертикальной и угловой скоростями (угловая скорость в данной ситуации измеряется в ортогональной проекции на поверхность стола относительно центра проекции кружки). Также оказалось, что муха совершила два полных оборота вокруг кружки и коснулась поверхности стола в точности под точкой, из которой свой путь начала. Натуралист Коля заинтересовался траекторией перемещения мухи и наклеил полосу липкой ленты ширины 3*см* поверх пути мухи так, что середина полосы идёт в

точности по этому пути, обрезав эту полосу вдоль верхнего и нижнего краёв кружки. Определите площадь наклеенного куска липкой ленты, если высота кружки 8*см*, а радиус $5/\pi$ *см*.

A fly landed on the upper edge of a cylindrical mug (without a handle) and crawled down its outer wall at an angle to the vertical and horizontal. It turned out that the fly moved all the way to the table with constant vertical and angular velocities (the angular velocity in this situation is measured in an orthogonal projection on the surface of the table relative to the center of the projection of the mug). It also turned out that the fly made two full turns around the mug and touched the surface of the table exactly under the point from which it started its journey. Naturalist Kolya became interested in the trajectory of the fly and pasted a strip of sticky tape width 3 *cm* on top of the fly path so that the middle of the strip goes exactly along this path, cutting this strip along the upper and lower edges of the circle. Determine the area of the glued piece of sticky tape if the height of the circle is 8 *cm*, and the radius is $5/\pi$ *cm*.

3. Муха села на верхнюю кромку цилиндрической кружки (без ручки) и поползла по её наружной стенке вниз под углом к вертикали и горизонтали. Оказалось, что весь свой путь до стола муха перемещалась с постоянными вертикальной и угловой скоростями (угловая скорость в данной ситуации измеряется в ортогональной проекции на поверхность стола относительно центра проекции кружки). Также оказалось, что муха совершила два полных оборота вокруг кружки и коснулась поверхности стола в точности под точкой, из которой свой путь начала. Натуралист Коля заинтересовался траекторией перемещения мухи и наклеил полосу липкой ленты ширины 4*см* поверх пути мухи так, что середина полосы идёт в точности по этому пути, обрезав эту полосу вдоль верхнего и нижнего краёв кружки. Определите площадь наклеенного куска липкой ленты, если высота кружки 5*см*, а радиус $2/\pi$ *см*.

   A fly landed on the upper edge of a cylindrical mug (without a handle) and crawled down its outer wall at an angle to the vertical and horizontal. It turned out that the fly moved all the way to the table with constant vertical and angular velocities (the angular velocity in this situation is measured in an orthogonal projection on the surface of the table relative to the center of the projection of the mug). It also turned out that the fly made two full turns around the mug and touched the surface of the table exactly under the point from which it started its journey. Naturalist Kolya became interested in the trajectory of the fly and pasted a strip of sticky tape width 2 *cm* on top of the fly path so that the middle of the strip goes exactly along this path, cutting this strip along the upper and lower edges of the circle. Determine the area of the glued piece of sticky tape if the height of the circle is 5 *cm*, and the radius is $2/\pi$ *cm*.

4. Муха села на верхнюю кромку цилиндрической кружки (без ручки) и поползла по её наружной стенке вниз под углом к вертикали и горизонтали. Оказалось, что весь свой путь до стола муха перемещалась с постоянными вертикальной и угловой скоростями (угловая скорость в данной ситуации измеряется в ортогональной проекции на поверхность стола относительно центра проекции кружки). Также оказалось, что муха совершила два полных оборота вокруг кружки и коснулась поверхности стола в точности под точкой, из которой свой путь начала. Натуралист Коля заинтересовался траекторией перемещения мухи и наклеил полосу липкой ленты ширины 3*см* поверх пути мухи так, что середина полосы идёт в точности по этому пути, обрезав эту полосу вдоль верхнего и нижнего краёв кружки. Определите площадь наклеенного куска липкой ленты, если высота кружки 7*см*, а радиус $3/\pi$ *см*.

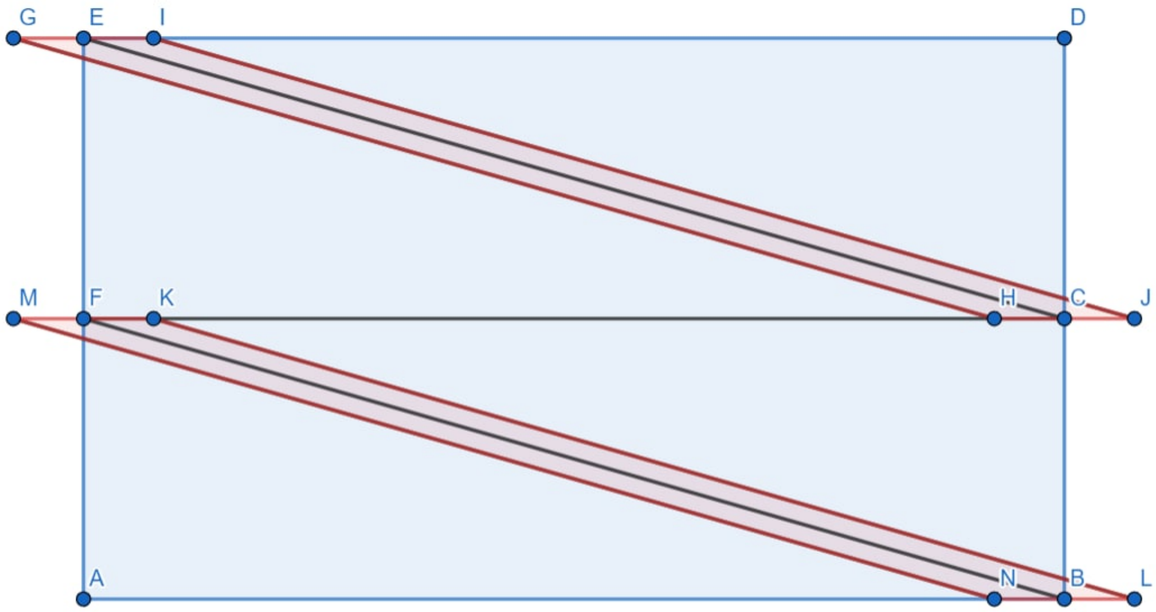
   A fly landed on the upper edge of a cylindrical mug (without a handle) and crawled down its outer wall at an angle to the vertical and horizontal. It turned out that the fly moved all the way to the table with constant vertical and angular velocities (the angular velocity in this situation is measured in an orthogonal projection on the surface of the table relative to the center of the projection of the mug). It also turned out that the fly made two full turns around the mug and touched the surface of the table exactly under the point from which it started its journey. Naturalist Kolya became interested in the trajectory of the fly and pasted a strip of sticky tape width 3 cm on top of the fly path so that the middle of the strip goes exactly along this path, cutting this strip along the upper and lower edges of the circle. Determine the area of the glued piece of sticky tape if the height of the circle is 7 cm, and the radius is $3/\pi$ cm.

Solution (RUS). Докажем, что если отклеить полосу, то она будет являться параллелограммом. Во-первых, представим, муха ползла не по поверхности кружки, а по бумажной подкладке, в которую предварительно обернули кружку: подкладка прямоугольной формы, размер $7 \times l$, где l - длина окружности дна кружки, то есть $2\pi \cdot \dfrac{4}{\pi} = 8$. Как известно, такой лист можно свернуть в цилиндр высоты 7 и радиуса $4/\pi$, то есть как раз подходящим, чтобы поместить внутрь кружку из условия. Поместим этот лист так, чтобы вертикальный шов (вдоль которого совмещаются противоположные края этого листа длины 7) начинался и заканчивался соответственно, в точках начала и окончания пути мухи они как раз находятся на одной вертикали относительно дна кружки.

Во-вторых, повторим маршрут мухи на этой обёртке (карандашом) это будет линия, которая начинается в одном углу прямоугольной обёртки и заканчивается в противоположном углу, причjм эта линия пересекает шов (то есть обе стороны листа длины 7) один раз, так как на поверхности цилиндра, покрытого этим листом, совершает два полных оборота. Докажем, что на развёрнутом листе бумаги (смотреть иллюстрацию) эта линия превращается в два отрезка. Действительно, по условию, муха перемещалась с постоянной вертикальной скоростью. Вертикальная скорость (относительно кружки), при повторении движения на развёрнутом листе обjртки, превращается в скорость перемещения точки по поверхности листа вдоль стороны длины 7. То есть виртуальная модель мухи, повторяющая траекторию мухи на обёртке со скоростью реальной мухи, имеет постоянную скорость вдоль направления стороны длины 7.

Легко видеть, что угловая скорость мухи превращается в скорость виртуальной мухи вдоль стороны длины 8 листа бумаги просто домножением на коэффициент 2π. Значит, скорость виртуальной мухи в этом направлении также постоянна. Тогда, считая стороны листа обjртки осями O_x и O_y, имеем, что x и y компоненты скорости виртуальной мухи постоянны. Тогда и общий вектор скорости виртуальной мухи, который равен сумме своих $x-$ и $y-$ проекций, является постоянным. То есть, кроме момента пересечения шва обёртки, траектория движения мухи прямолинейна.

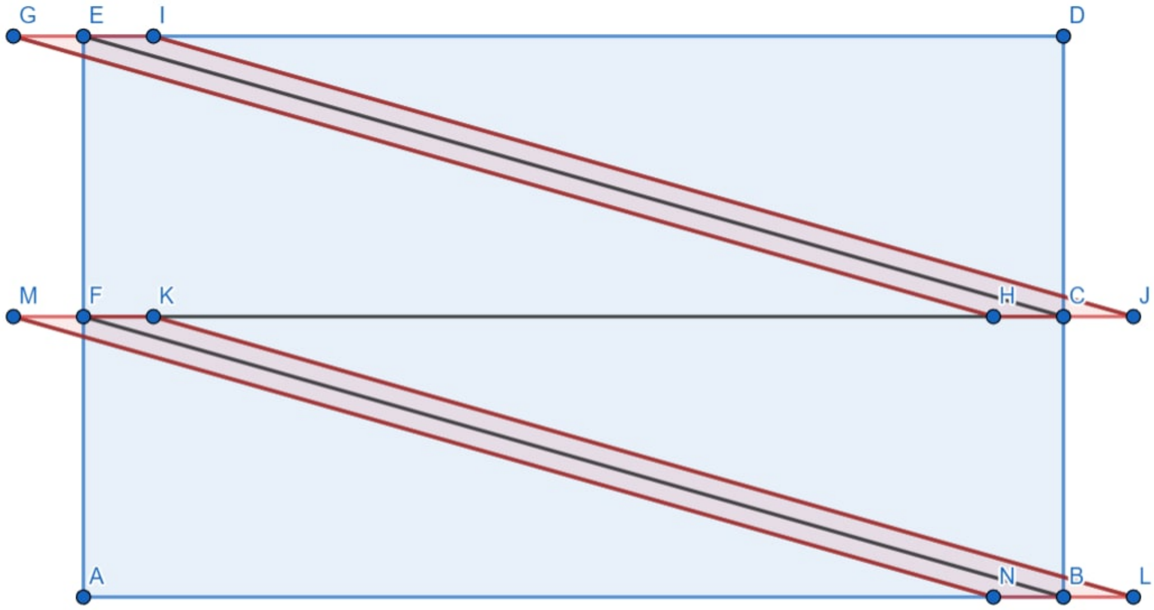
Таким образом, получаем, что липкая лента приклеена вдоль прямой линии, если смотреть по обёртке, и обрезана вдоль сторон длины 8 этой обёртки, то есть вдоль прямых параллельных линий на развёртке. То есть липкая лента имеет форму параллелограмма (при отклеивании и выравнивании на плоскости), а средняя линия этого параллелограмма совпадает с траекторией мухи. Траектория мухи это два отрезка на обёртке (отрезки $EC - FB$), которые можно представить в виде одной целой диагонали листа размера $7 \times (2 \cdot 8)$, который получается прикладываем двух экземпляров обёртки вдоль шва. Таким образом, длина траектории равна $\sqrt{7^2 + 16^2} = \sqrt{305}$, а площадь липкой ленты длина средней линии параллелограмма на толщину параллелограмма (то есть 2 см). Итого, ответ $2\sqrt{305}$ см^2.



Замечание: Многие участники рассматривали случай прямоугольной ленты, отчего в своих решениях они вычитали "лишнюю"часть, за такие решения мы так же ставили полный балл.

Solution (ENG). We prove that if we peel off the strip, then it will be a parallelogram. First, imagine that the fly was crawling not on the surface of the mug, but on the paper lining in which the mug was previously wrapped: a rectangular lining, size $7\times l$, where l is the circumference of the bottom of the mug, that is, $2\pi\cdot\dfrac{4}{\pi}$=8. As you know, such a sheet can be rolled into a cylinder with a height of 7 and a radius of $4/\pi$, that is, just right to put a mug from the condition inside. Let's place this sheet so that the vertical seam (along which the opposite edges of this sheet of length 7 are combined) begins and ends, respectively, at the points of the beginning and end of the fly's path, they are just on the same vertical relative to the bottom of the circle.
Secondly, we will repeat the route of the fly on this wrapper (with a pencil) this will be a line that starts in one corner of the rectangular wrapper and ends in the opposite corner, so this line crosses the seam (that is, both sides of the sheet of length 7) once, since it makes two complete turns on the surface of the cylinder covered with this sheet. Let's prove that on an expanded sheet of paper (see illustration) this line turns into two segments. Indeed, by convention, the fly moved at a constant vertical speed. The vertical velocity (relative to the circle), when repeating the movement on the unfolded sheet of paper, turns into the velocity of the point moving along the surface of the sheet along the side of the length 7. That is, a virtual model of a fly repeating the trajectory of a fly on a wrapper at the speed of a real fly has a constant velocity along the direction of the side of the length 7.
It is easy to see that the angular velocity of a fly turns into the velocity of a virtual fly along the side of the 8 length of a sheet of paper by simply multiplying by a factor of 2π. This means that the speed of the virtual fly in this direction is also constant. Then, counting the sides of the sheet of paper with the axes O_x and O_y, we have that the x and y components of the velocity of the virtual fly are constant. Then the general velocity vector of the virtual fly, which is equal to the sum of its $x-$ and $y-$ projections, is constant. That is, except for the moment of crossing the seam of the wrapper, the trajectory of the fly is rectilinear.
Thus, we get that the sticky tape is glued along a straight line, if you look at the wrapper, and cut along the sides of the length 8 of this wrapper, that is, along straight parallel lines on the scan. That is, the sticky tape has the shape of a parallelogram (when peeling off and aligning on a plane), and the middle line of this parallelogram coincides with the trajectory of the fly. The trajectory of the fly is two segments on the wrapper (segments $EC-FB$), which can be represented as one whole diagonal of a sheet of size $7\times(2\cdot 8)$, which is obtained by applying two copies of the wrapper along the seam. Thus, the length of the trajectory is equal to $\sqrt{7^2+16^2}=\ sqrt305$, and the area of the adhesive tape is the

length of the middle line of the parallelogram by the thickness of the parallelogram (that is, 2 cm). In total, the answer is $2\sqrt{305}$ cm^2.



Note: Many participants considered the case of a rectangular ribbon, which is why they deducted the "extra"part in their decisions, we also gave a full score for such solutions.

Task 6.

1. Функция f называется периодической, если она принимает хотя бы два различных значения, и найдется такое $p > 0$, что $f(x + p) = f(x)$ для любого x. При этом каждое такое число p называется периодом функции f.

   Существуют ли такие периодические функции g и h с периодами 1 и π соответственно, что $g + h$ – тоже периодическая функция?

   A function f is called periodic if it takes at least two different values and there exists $p > 0$ such that $f(x + p) = f(x)$ for any x. Each of the numbers p are called periods of the function f.

   Is it possible to construct functions g и h with periods 1 and π respectively such that $g + h$ is also a periodic function?

2. Функция f называется периодической, если она принимает хотя бы два различных значения, и найдется такое $p > 0$, что $f(x + p) = f(x)$ для любого x. При этом каждое такое число p называется периодом функции f.

   Существуют ли такие периодические функции g и h с периодами 3 и π соответственно, что $g - h$ – тоже периодическая функция?

   A function f is called periodic if it takes at least two different values and there exists $p > 0$ such that $f(x + p) = f(x)$ for any x. Each of the numbers p are called periods of the function f.

   Is it possible to construct functions g и h with periods 3 and π respectively such that $g - h$ is also a periodic function?

3. Функция f называется периодической, если она принимает хотя бы два различных значения, и найдется такое $p > 0$, что $f(x + p) = f(x)$ для любого x. При этом каждое такое число p называется периодом функции f.

Существуют ли такие периодические функции g и h с периодами 2 и $\pi/2$ соответственно, что $g+h$ – тоже периодическая функция?

A function f is called periodic if it takes at least two different values and there exists $p > 0$ such that $f(x+p) = f(x)$ for any x. Each of the numbers p are called periods of the function f.

Is it possible to construct functions g и h with periods 2 and $\pi/2$ respectively such that $g+h$ is also a periodic function?

4. Функция f называется периодической, если она принимает хотя бы два различных значения, и найдется такое $p > 0$, что $f(x+p) = f(x)$ для любого x. При этом каждое такое число p называется периодом функции f.

   Существуют ли такие периодические функции g и h с периодами 6 и 2π соответственно, что $g-h$ – тоже периодическая функция?

   A function f is called periodic if it takes at least two different values and there exists $p > 0$ such that $f(x+p) = f(x)$ for any x. Each of the numbers p are called periods of the function f.

   Is it possible to construct functions g и h with periods 6 and 2π respectively such that $g-h$ is also a periodic function?

Solution (RUS). Сразу отметим, что такие функции существуют, и их достаточно много. Приведем в пример одну возможную комбинацию:

$$f(x) = \begin{cases} m, & \text{если } x = m + n\pi, \text{ где } m, n \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -n, & \text{если } x = m + n\pi, \text{ где } m, n \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Тогда в любой точке x, которая не представима в виде $m + n\pi$, функция $h(x) = f(x) + g(x)$ равна 0. Если же $x = n + m\pi$, имеем $h(x) = m - n = (m+1) - (m+1) = f(x + (1+\pi)) + g(x + (1+\pi))$. Значит, $h(x)$ – периодическая функция с периодом $1 + \pi$.

Solution (ENG). Let's show that there are such functions. There are many possible options, let's show one of them:

$$f(x) = \begin{cases} m, & \text{if } x = m + n\pi, \text{ where } m, n \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -n, & \text{if } x = m + n\pi, \text{ where } m, n \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hence for any $x \neq m + n\pi$, function $h(x) = f(x) + g(x)$ equals 0. On the other hand, if $x = n + m\pi$, obtain $h(x) = m - n = (m+1) - (m+1) = f(x + (1+\pi)) + g(x + (1+\pi))$. Hence, $h(x)$ – periodic funciton with period $1 + \pi$.