Каждый участник получает комплект из 6 задач, при этом каждая из них случайным образом выбирается из 4-х вариантов.
Первые 4 задачи подразумевают краткий ответ в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых. Задачи под номерами 5 и 6 требуют развернутого решения и (если это предусмотрено условием) ответа.

7^{th} degree

Task 1.

1. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
   Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: его элементы – это все элементы A_n и, кроме того, множество, состоящее из всех элементов A_n.
   Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

   - $A_0 = \emptyset$;
   - $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
   - $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

   Сколько элементов содержит множество A_{24}?

   Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers as sets.
   Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: its elements are all the elements of A_n with the set consisting of all the elements of A_n.
   Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

   - $A_0 = \emptyset$;
   - $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
   - $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

   How many elements does the set A_{24} contain?

   Answer: 25

2. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
   Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n

уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: его элементы – это все элементы A_n и, кроме того, множество, состоящее из всех элементов A_n.
Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Сколько элементов содержит множество A_{37}?

Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers as sets.
Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: its elements are all the elements of A_n with the set consisting of all the elements of A_n.
Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

How many elements does the set A_{37} contain?

Answer: 38

3. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: его элементы – это все элементы A_n и, кроме того, множество, состоящее из всех элементов A_n.
Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Сколько элементов содержит множество A_{42}?

Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers

as sets.
Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: its elements are all the elements of A_n with the set consisting of all the elements of A_n.
Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

How many elements does the set A_{42} contain?

Answer: 43

4. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: его элементы – это все элементы A_n и, кроме того, множество, состоящее из всех элементов A_n.
Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Сколько элементов содержит множество A_{77}?

Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers as sets.
Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$: its elements are all the elements of A_n with the set consisting of all the elements of A_n.
Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

How many elements does the set A_{77} contain?

Answer: 78

Solution (RUS). Заметим,что, согласно определению A_n, для каждого натурального $n > 1$ такое множество содержит все элементы множества A_{n-1} и, кроме того, само множество A_{n-1} – значит, в множестве A_n на 1 элемент больше, чем в множестве A_{n-1}, на 2 элемента больше, чем в A_{n-2} и т.д.
Итак, в множестве A_n на $(n-1)$ элемент больше, чем в A_1 – значит, в нем $2 + (n-1) = n+1$ элементов.

Solution (ENG). Note that, according to the definition of A_n, for each integer $n > 1$ such a set contains all elements of the set A_{n-1} and, in addition, the set A_{n-1} itself – hence, in set A_n has 1 more element than A_{n-1}, 2 more than A_{n-2}, etc.
So, in the set A_n, the number of elements is $(n-1)$ more than in A_1, which means that it has $2 + (n-1) = n+1$ elements.

Task 2.

1. Зубной врач запретил Кате есть больше десяти конфет в день. Более того, если в какой-то день Катя съедает больше семи конфет, то в следующие два дня ей нельзя есть более пяти конфет в день. Какое максимальное количество конфет может съесть Катя за 25 дней, пока действуют ограничения врача?

   The dentist forbade Kate to eat more than ten sweets a day. Moreover, if one day Kate eats more than seven sweets, then in the next two days she can't eat more than five sweets a day. What is the maximum number of sweets Kate can eat in 25 days while the doctor's restrictions are in effect?

   Answer: 178

2. Зубной врач запретил Кате есть больше десяти конфет в день. Более того, если в какой-то день Катя съедает больше семи конфет, то в следующие два дня ей нельзя есть более пяти конфет в день. Какое максимальное количество конфет может съесть Катя за 32 дня, пока действуют ограничения врача?

   The dentist forbade Kate to eat more than ten sweets a day. Moreover, if one day Kate eats more than seven sweets, then in the next two days she can't eat more than five sweets a day. What is the maximum number of sweets Kate can eat in 32 days while the doctor's restrictions are in effect?

   Answer: 227

3. Зубной врач запретил Кате есть больше десяти конфет в день. Более того, если в какой-то день Катя съедает больше семи конфет, то в следующие два дня ей нельзя есть более пяти конфет в день. Какое максимальное количество конфет может съесть Катя за 39 дней, пока действуют ограничения врача?

   The dentist forbade Kate to eat more than ten sweets a day. Moreover, if one day Kate eats more than seven sweets, then in the next two days she can't eat more than five sweets a day. What is the maximum number of sweets Kate can eat in 39 days while the doctor's restrictions are in effect?

Answer: 276

4. Зубной врач запретил Кате есть больше десяти конфет в день. Более того, если в какой-то день Катя съедает больше семи конфет, то в следующие два дня ей нельзя есть более пяти конфет в день. Какое максимальное количество конфет может съесть Катя за 45 дней, пока действуют ограничения врача?

   The dentist forbade Kate to eat more than ten sweets a day. Moreover, if one day Kate eats more than seven sweets, then in the next two days she can't eat more than five sweets a day. What is the maximum number of sweets Kate can eat in 45 days while the doctor's restrictions are in effect?

Answer: 318

Solution (RUS). *(решение варианта 1, остальные решаются аналогично)*
Докажем, что больше 178 конфет быть не могло. Пусть всё же получилось съесть больше. Выпишем в ряд слева направо количества конфет, съеденных Катей за каждый из дней, где самые левые числа обозначают конфеты, съеденные в первые дни, а самые правые - в последние. Получается ряд из 25ти чисел (в какой-то из дней может быть и 0). Будем идти вдоль этого ряда слева направа (то есть от самых давних значений к самым новым). В момент, когда будем встречать число 8 или больше, будем обводить это число и два последующих (или меньше, если до конца ряда осталось меньше чисел) в один овал - выделять их как группу. После выделения этой группы будем продолжать идти вдоль последовательности далее, если надо - снова выделяя новые группы овалами (один овал на одну группу из не более чем трёх чисел). Тогда внутри каждой выделенной группы из трёх чисел сумма не более $10 + 10$ (первое число в группе не более 10, сумма двух последующих не более 10). Внутри выделенной группы из двух чисел сумма не более 15 по аналогичной причине. Если число в такой группе одно, то сумма в этой группе не превосходит 10. Тогда все числа разбиваются на несколько выделенных групп и остаток из чисел, которые не относятся ни к одной из выделенных групп. Числа вне групп каждое не превышает 7. Обозначим количество полных выделенных групп (то есть с трёмя числами) k.
Если в конце ряда нет неполной группы (то есть содержащей одно или два числа), то в каждой группе сумма не превышает 20, как показано ранее. Чисел вне групп ровно $25 - 3k$, каждое не более 7. Значит общая сумма не превышает $7(25 - 3k) + 20k = 7 - 25 - k = 175 - k$, где k - целое неотрицательное число. Значит максимум такой суммы равен 175.
Если в конце стоит неполная группа из одного числа (она не учитывается в количестве полных групп, которых k). Тогда сумма не превышает $7(25 - 3k - 1) + 20k + 10 = 178 - k$, то есть не более 178.
Если в конце стоит неполная группа из двух чисел, то (для формулировки с двумя пятёрками) сумма не превосходит $7(25 - 3k - 2) + 20k + 10 + 5 = 175 - 14 + 15 - k = 176 - k$, то есть не более 176.

Solution (ENG). *(solution of version 1, the others are solved similarly)*
Let's prove that there could not have been more than 178 sweeties. Let Kate still happen to eat more. Let's write out in a row from left to right the number of sweets eaten by Katya for each of the days, where the leftmost numbers denote the sweets eaten in the first days, and the rightmost - in the last. It turns out a series of 25 numbers (in some of the days there may be 0). We will go along this row from the left direction (that is, from the oldest values to the newest ones). At the moment when we meet the number 8 or more, we will circle this number and two subsequent ones (or less, if there are fewer numbers left before the end of the row) in one oval - highlight them as a group. After selecting this group, we will continue to follow the sequence further, if necessary, again allocating new groups with ovals (one oval per group of no more than three numbers). Then, within each selected group of three

numbers, the sum is no more than $10 + 10$ (the first number in the group is no more than 10, the sum of the next two is no more than 10). Inside the selected group of two numbers, the sum is no more than 15 for a similar reason. If there is one number in such a group, then the amount in this group does not exceed 10.
Then all the numbers are divided into several selected groups and the remainder of the numbers that do not belong to any of the selected groups. The numbers outside the groups each do not exceed 7. Denote the number of complete selected groups (that is, with three numbers) k. If there is no incomplete group at the end of the row (that is, containing one or two numbers), then the sum in each group does not exceed 20, as shown earlier. The numbers outside the groups are exactly $25 - 3k$, each no more than 7. So the total amount does not exceed $7(25-3k)+20k = 7-25-k = 175-k$, where k is a non-negative integer. So the maximum of this amount is 175.
If there is an incomplete group of one number at the end (it is not counted in the number of complete groups, of which there are k). Then the amount does not exceed $7(25 - 3k - 1) + 20k + 10 = 178 - k$, that is, no more than 178.
If there is an incomplete group of two numbers at the end, then (for a formulation with two fives) the amount does not exceed $7(25-3k-2)+20k+10+5 = 175-14+15-k = 176-k$, that is, no more than 176.

Task 3.

1. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $3N+2$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с двух конфет и успел произнести заклинание 14 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $3N + 2$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with two candies and managed to cast the spell 14 times?

   Answer: 14348906

2. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $5N+4$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с четырех конфет и успел произнести заклинание 9 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $5N + 4$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with four candies and managed to cast the spell 9 times?

   Answer: 9765624

3. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $4N+3$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с трех конфет и успел произнести заклинание 11 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $4N + 3$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with three candies and managed to cast the spell 11 times?

Answer: 16777215

4. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $6N + 5$ конфет. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с пяти конфет и успел произнести заклинание 8 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $6N + 5$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with five candies and managed to cast the spell 8 times?

Answer: 10077695

Solution (RUS). *(решение варианта 1, остальные решаются аналогично)*
Давайте рассмотрим, сколько конфет было у Рона после каждого заклинания.
0 заклинаний - 2 конфеты
1 заклинание - $3 \cdot 2 + 2$ конфет
2 заклинания - $3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2$ конфет
...
n заклинаний - $3^n \cdot 2 + 3^{n-1} \cdot 2 + \cdots + 3 \cdot 2 + 2$ конфет
Легко заметить, что количество конфет после n-го заклинания - сумма элементов геометрической прогрессии с первым элементом прогрессии $a = 2$ и знаменателем геометрической прогрессии $q = 3$. Заметим, что в нашей задаче $a = q - 1$. Таким образом, общая формула для количества конфет после n закинаний будет: $S(n) = a \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = q^{n+1} - 1$
Таким образом, при $n = 14$ мы получим $3^{15} - 1 = 14348906$ конфет.

Solution (ENG). *(solution of version 1, the others are solved similarly)*
Let's look at how many candies Ron had after each spell.
0 spells - 2 candies
1 spell - $3 \cdot 2 + 2$ candies
2 spells - $3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2$ candies
...
n spells - $3^n \cdot 2 + 3^{n-1} \cdot 2 + \cdots + 3 \cdot 2 + 2$ candies
It is easy to notice that the number of candies after the nth spell is the sum of the elements of the geometric progression with the first element of the progression $a = 2$ and the denominator of the geometric progression $q = 3$. Note that in our problem $a = q - 1$. Thus, the general formula for the number of candies after n spells will be: $S(n) = a \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = q^{n+1} - 1$
Thus, for $n = 14$ we get $3^{15} - 1 = 14348906$ candies.

Task 4.

1. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 6 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 6 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

Answer: 2

2. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 9 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 9 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

   Answer: 3

3. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 4.5 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 4.5 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

   Answer: 1.5

4. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 7.5 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 7.5 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

Answer: 2.5

Solution (RUS). Пусть L - длина дорожки, и $t = 0$ в момент, когда папа и Саша начали движение от точки «Старт».
Ясно, что картинка полностью повторится, как только дедушка пройдёт полный круг – все скорости кратны v; так что рассматриваем только события до $T = L/v$.
За это время дедушка успеет повстречаться с Сашей 4 раза, а с папой один. Найдём времена t_1, t_2, t_3 и t_4 встреч Саши и дедушки, и время t_d встречи папы и дедушки: между Сашей и дедушкой до первой встречи расстояние $L - d$, скорость сближения - $4v$, далее добавляется $L/4v$ - время, за которое Саша проезжает от дедушки до дедушки. Таким образом, получаем общую формулу $t_i = \dfrac{iL - d}{4v}$ для $i = 1, 2, 3, 4$. Аналогично $t_d = \dfrac{L-d}{v}$. Теперь найдем решения уравнения $t_i = t_d$ относительно d (т.е. найдем при каких d все встретятся в одной точке). Решения: $d = L$, $d = 2L/3$, $d = L/3$, $d = 0$. По условию задачи нам подходит отет $d = L/3$, т.к. он минимальный и больше 0.

Solution (ENG). Let L be the length of the round path, and $t = 0$ at the moment when Alex and his dad started moving from the point «Start».
It is clear that the picture will completely repeat itself as soon as grandpa goes full circle – all speeds are multiples of v; so we consider only events up to $T = L/v$.
During this time, grandpa will have time to meet Alex 4 times, and with dad one. Let's find the times t_1, t_2, t_3 and t_4 meeting of Alex and grandpa, and the time t_d meeting of dad and grandpa: between Alex and grandpa before the first meeting, the distance is $L - d$, the speed of convergence is $4v$, then $L/4v$ is added - the time for which Alex passes from grandfathers to grandfathers. Thus, we obtain the general formula $t_i = \frac{id}{4v}$ for $i = 1, 2, 3, 4$. Similarly, $t_d = \dfrac{L-d}{v}$. Now we will find solutions to the equation $t_i = t_d$ with respect to d (i.e. we will find at which d all meet at one point). Solutions: $d = L$, $d = 2L/3$, $d = L/3$, $d = 0$. By the condition of the problem, the answer $d = L/3$ is suitable for us, because it is minimal and greater than 0.

Task 5.

1. Для того, чтобы развести костёр, хоббитам необходимы кремень, кресало и трут. Перед походом компания из 11 юных хоббитов закупила по 6 штук кремней, кресал и коробочек с трутом и разложила их как попало по своим рюкзакам – известно лишь, что в каждый рюкзак не могло попасть более одного предмета каждого вида (кремня, кресала или трута), но по одному каждого вида – могли. Тёмной ночью хоббиты случайно разделились на 2 группы. Докажите, что хотя бы одна из групп сможет развести костёр и послать сигнал другой.

   To set up a bonfire, hobbits need flint, steel and tinder. Before traveling, a group of 11 hobbits bought 6 pieces of flint, steel and tinder and randomly put them into the backpacks. It is known, that each backpack can have no more than one item of each class. During the dark night hobbits were randomly divided into two groups. Prove that at least one of groups can set up a bonfire and send a signal to another one.

2. Для того, чтобы развести костёр, хоббитам необходимы кремень, кресало и трут. Перед походом компания из 14 юных хоббитов закупила по 8 штук кремней, кресал и коробочек с трутом и разложила их как попало по своим рюкзакам – известно лишь, что в каждый рюкзак не могло попасть более одного предмета каждого вида (кремня, кресала или трута), но по одному каждого вида – могли. Тёмной ночью хоббиты случайно разделились на 2 группы.

Докажите, что хотя бы одна из групп сможет развести костёр и послать сигнал другой.

To set up a bonfire, hobbits need flint, steel and tinder. Before traveling, a group of 14 hobbits bought 8 pieces of flint, steel and tinder and randomly put them into the backpacks. It is known, that each backpack can have no more than one item of each class. During the dark night hobbits were randomly divided into two groups. Prove that at least one of groups can set up a bonfire and send a signal to another one.

3. Для того, чтобы развести костёр, хоббитам необходимы кремень, кресало и трут. Перед походом компания из 17 юных хоббитов закупила по 9 штук кремней, кресал и коробочек с трутом и разложила их как попало по своим рюкзакам – известно лишь, что в каждый рюкзак не могло попасть более одного предмета каждого вида (кремня, кресала или трута), но по одному каждого вида – могли. Тёмной ночью хоббиты случайно разделились на 2 группы. Докажите, что хотя бы одна из групп сможет развести костёр и послать сигнал другой.

   To set up a bonfire, hobbits need flint, steel and tinder. Before traveling, a group of 17 hobbits bought 9 pieces of flint, steel and tinder and randomly put them into the backpacks. It is known, that each backpack can have no more than one item of each class. During the dark night hobbits were randomly divided into two groups. Prove that at least one of groups can set up a bonfire and send a signal to another one.

4. Для того, чтобы развести костёр, хоббитам необходимы кремень, кресало и трут. Перед походом компания из 20 юных хоббитов закупила по 11 штук кремней, кресал и коробочек с трутом и разложила их как попало по своим рюкзакам – известно лишь, что в каждый рюкзак не могло попасть более одного предмета каждого вида (кремня, кресала или трута), но по одному каждого вида – могли. Тёмной ночью хоббиты случайно разделились на 2 группы. Докажите, что хотя бы одна из групп сможет развести костёр и послать сигнал другой.

   To set up a bonfire, hobbits need flint, steel and tinder. Before traveling, a group of 20 hobbits bought 11 pieces of flint, steel and tinder and randomly put them into the backpacks. It is known, that each backpack can have no more than one item of each class. During the dark night hobbits were randomly divided into two groups. Prove that at least one of groups can set up a bonfire and send a signal to another one.

Solution (RUS). *(решение варианта 1, остальные решаются аналогично)*
Если хоббитов 11, то, рассматривая каждую пару товаров (например, кресала и кремни – а их всего $2 \times 6 = 12$) в рюкзаках, по принципу Дирихле делаем вывод, что хотя бы в одном рюкзаке есть пара этих предметов.
По условию, в рюкзаке не может оказаться 2 кресала или 2 кремня, значит, хотя бы у одного хоббита в рюкзаке окажутся кресало и кремень (обозначим $\{x, y\}$). То же можно сказать о паре кремень и трут (обозначим $\{y, z\}$), о паре кресало и трут (обозначим $\{x, z\}$).
Таким образом, выполняется одно из двух условий:
a) есть хотя бы один хоббит с предметами $\{x, y, z\}$ в рюкзаке (все пары собрались хотя бы в одном рюкзаке) и он разведёт костёр,
b) есть 3 разных хоббита с предметами $\{x, y\}$, $\{y, z\}$, $\{x, z\}$ соответственно, из этих трех хоббитов хотя бы два (по принципу Дирихле) окажутся в одной группе и тоже смогут развести костёр.

Solution (ENG). *(solution of version 1, the others are solved similarly)*
If there are 11 hobbits, then considering each pair of goods (for example, steel and flints – and there

are only $2 \times 6 = 12$ of them) in backpacks, according to the Dirichlet principle, we conclude that at least one backpack has a pair of these items.
By convention, there cannot be 2 steel or 2 flints in the backpack , which means that at least one hobbit will have a steel and a flint in the backpack (denote $\{x, y\}$). The same can be said about the pair of flint and tinder (denote $\{y, z\}$), about the pair of steel and tinder (denote $\{x, z\}$).
Thus, one of two conditions is met:
a) there is at least one hobbit with items $\{x, y, z\}$ in a backpack (all pairs gathered in at least one backpack) and he will make a fire,
b)there are 3 different hobbits with objects $\{x, y\}$, $\{y, z\}$, $\{x, z\}$, respectively, of these three hobbits at least two (according to the Dirichlet principle) will be in the same group and they will also be able to make a fire.

Task 6.

1. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 7×7 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 7×7. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

2. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 10×10 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 10×10. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

3. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 9×9 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 9×9. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

4. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 8×8 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 8×8. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

Solution (RUS). *(решение варианта 1, остальные решаются аналогично)*
Петя (первый игрок) может гарантировать себе победу.
Для победы Пети следует своим первым ходом вырезать центральную клетку квадрата, а далее на каждый ход Вити отвечать симметричным ходом относительно центра доски.
Покажем, что если Витя сделал свой очередной ход, то Петя тоже сможет сделать ход согласно этой стратегии: действительно, после каждого сделанного хода Пети картинка из закрашенных клеток на доске (не учитывая цвет) симметрична. Тогда, если Витя сделал свой очередной ход, то симметричная зона доски перед ходом Вити была также свободна.
Остается объяснить, почему сам последний ход Вити не затронул эти клетки. Но действительно, если одним ходом Витя покрасил бы две какие-либо симметричные относительно центра клетки, то так как этот ход состоял в закрашивании прямоугольника, то и центр симметрии клеток должен был попасть в эту фигуру. Однако центр симметрии уже был изначально закрашен Петей. Значит Витя не мог «испортить» позицию для Пети, и Петя может сделать ход. Кто-то в этой игре обязательно проигрывает, и это не Петя. Значит, Петя выигрывает.

Solution (ENG). *(solution of version 1, the others are solved similarly)*
Peter (the one whose move is the first) can guarantee himself a victory.
To win, Peter should cut out the central square cell with his first move, and then respond to each move with a symmetrical move relative to the center of the board.
Let's show that if Victor made his next move, then Peter will also be able to make a move according to this strategy: indeed, after each move made by Peter, the picture of the painted cells on the board (not taking into account the color) is symmetrical. Then, if Victor made his next move, then the symmetrical area of the board before Victor's move was also free.
It remains to explain why the very last move of Victor did not affect these cells. But really, if Victor painted two cells that were symmetrical with respect to the center with one move, then since this move consisted in painting over a rectangle, then the center of symmetry of the cells had to fall into this figure. However, the center of symmetry was already initially painted over by Peter. So Victor could not «spoil» the position for Peter, and Peter can make a move. Someone in this game is bound to lose, and it's not Peter. So, Peter wins.

8-9 degree

Task 1.

1. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $3N+2$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с двух конфет и успел произнести заклинание 14 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $3N+2$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with two candies and managed to cast the spell 14 times?

   Answer: 14348906

2. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $5N+4$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с четырех конфет и успел произнести заклинание 9 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $5N+4$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with four candies and managed to cast the spell 9 times?

   Answer: 9765624

3. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $4N+3$ конфеты. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с трех конфет и успел произнести заклинание 11 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $4N+3$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with three candies and managed to cast the spell 11 times?

   Answer: 16777215

4. Маленький Рон Уизли выучил заклинание умножения конфет, которое превращает N имеющихся у вас конфет в $6N+5$ конфет. Сколько конфет стало у Рона к приходу мамы, если начал он с пяти конфет и успел произнести заклинание 8 раз?

   Little Ron Weasley has learned a candy multiplication spell that turns N of the candies you have into $6N+5$ candies. How many candies did Ron have by the time his mom arrived, if he started with five candies and managed to cast the spell 8 times?

   Answer: 10077695

Solution (RUS). См. решение задачи №3 для 7 класса.

Solution (ENG). See solution of the task 3 for the 7th degree.

Task 2.

1. В каждую клетку таблицы 100×100 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 100, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 200, и так далее – в k-ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \ldots, 100k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

   Each cell of the table 100×100 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 100 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 200, and further on – k-th line has numbers $k, 2k, 3k, \ldots, 100k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

   Answer: 2550

2. В каждую клетку таблицы 200×200 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 200, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 400, и так далее – в k-ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \ldots, 200k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

   Each cell of the table 200×200 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 200 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 400, and further on – k-th line has numbers $k, 2k, 3k, \ldots, 200k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

   Answer: 10100

3. В каждую клетку таблицы 150×150 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 150, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 300, и так далее – в k-ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \ldots, 150k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

   Each cell of the table 150×150 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 150 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 300, and further on – k-th line has numbers $k, 2k, 3k, \ldots, 150k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

Answer: 5700

4. В каждую клетку таблицы 250×250 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 250, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 500, и так далее – в k-ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \ldots, 250k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

   Each cell of the table 250×250 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 250 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 500, and further on – k-th line has numbers $k, 2k, 3k, \ldots, 250k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

Answer: 15750

Solution (RUS). *(решение варианта 1, остальные решаются аналогично)*
В клетках указанной диагонали записаны числа 100×1, 99×2, 98×3, $\ldots$,1×1000. То есть в общем виде - числа вида $k(101-k)$ при целых k от 1 до 100. Это уравнение стандартной параболы ветвями вниз, с корнями в точках 0 и 101. Абсцисса её вершины равна $101/2$. Левее неё, т.е. на интервале $(-\infty,\ 101/2]$ эта функция возрастает, т.е. максимальное её значение при $k = [101/2] = 50$ и равно $50(101-50) = 50 \cdot 51 = 2550$. Правее же вершины (т.е. на $[101/2,\ +\infty)$ эта функция убывает и аналогично её максимум достигается при k = 51 и равен также 2550. Таким образом, максимальное число на диагонали равно 2550.

Solution (ENG). *(solution of version 1, the others are solved similarly)*
The numbers are written in the cells of the specified diagonal 100×1, 99×2, 98×3, ...,1×1000. That is, in general, numbers of the form $k(101-k)$ for integers k from 1 to 100. This is the equation of a standard parabola with branches downwards, with roots at points 0 and 101. The abscissa of its vertex is $101/2$. To the left of it, i.e. on the interval $(-\infty,\ 101/2]$ this function increases, i.e. its maximum value at $k = [101/2] = 50$ and is equal to $50(101$ - $50) = 50 \cdot 51 = 2550$. To the right of the vertex (i.e. at $[101/2,\ +\infty)$, this function decreases and similarly its maximum is reached when k = 51 and is also equal to 2550. Thus, the maximum number on the diagonal is 2550.

Task 3.

1. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB. Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD, причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 12, CD = 7$.

   Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB. The points C and D are located on the segments AO, OB, respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD, moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order.
   Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 12, CD = 7$.

Answer: 23.75; 63.05

2. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB. Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD, причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 10, CD = 9$.

   Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB. The points C and D are located on the segments AO, OB, respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD, moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 10, CD = 9$.

   Answer: 4.75; 49.54

3. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB. Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD, причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 15, CD = 4$.

   Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB. The points C and D are located on the segments AO, OB, respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD, moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 15, CD = 4$.

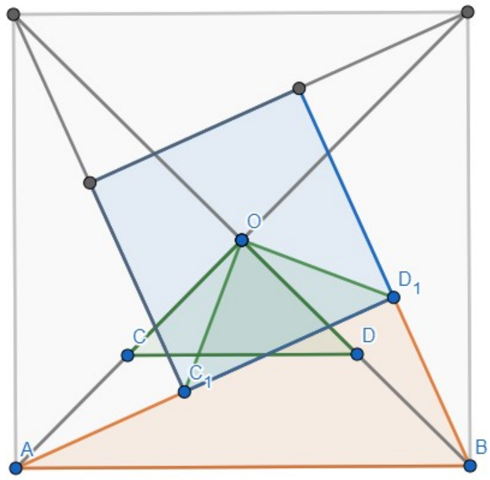
   Answer: 52.25; 77.13

4. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB. Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD, причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 16, CD = 13$.

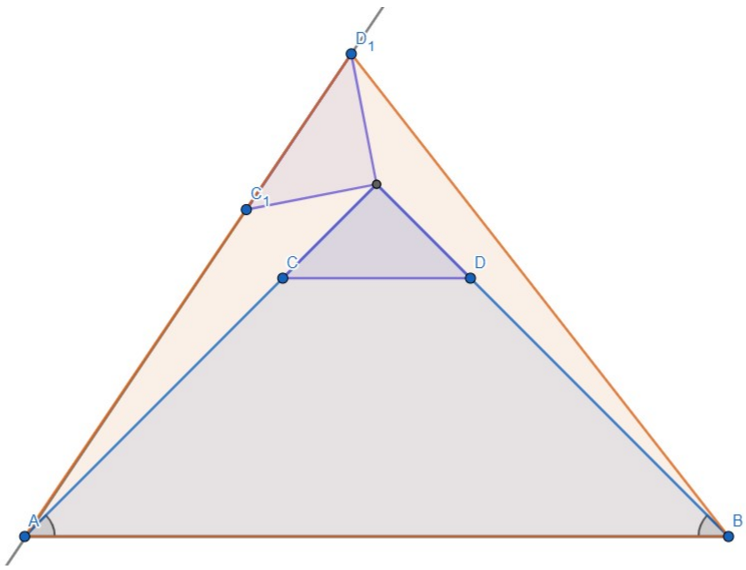
   Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB. The points C and D are located on the segments AO, OB, respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD, moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 16, CD = 13$.

   Answer: 21.75; 124.19

Solution (RUS). *(решение варианта 3, остальные решаются аналогично)*
Расширив чертеж, получим два правильных четырёхугольника со сторонами $|AB|$ и $|CD|$ и общим центром O. Заметим, что нам просто нужно вычесть площадь меньшего правильного четырёхугольника (со стороной $|CD|$) из площади большего правильного четырёхугольника (со стороной $|AB|$) и поделить результат на 4 (см. рисунок).
Искомая площадь треугольника равна $\dfrac{|AB|^2 - |CD|^2}{4} = 52.25$.

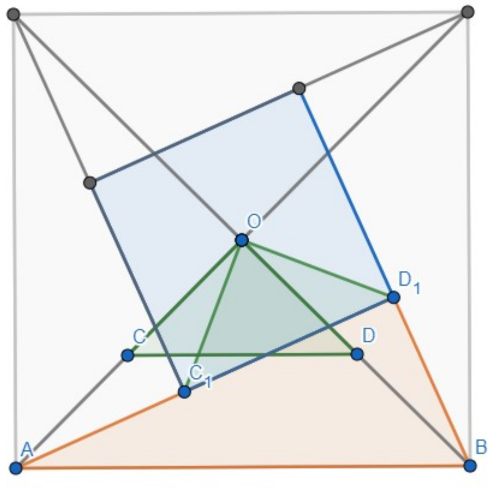


Если же луч AD_1 целиком находится вне треугольника AOB (см. рисунок ниже), получим $S_{ABD_1} \approx 77.13$.

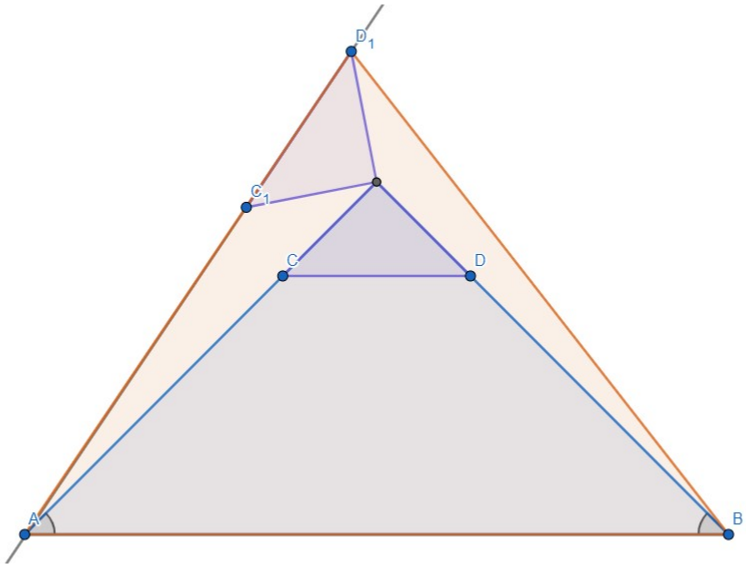


Solution (ENG). *(solution of version 3, the others are solved similarly)*
After extending our picture we get two regular quadrilaterals with sides $|AB|$ and $|CD|$ and the common center is O. Note that we just need to subtract the area of the smaller regular quadrilateral (with the side $|CD|$) from the area of the larger regular quadrilateral (with the side $|AB|$) and divide the result by 4 (see picture).

The desired area of the triangle is $\dfrac{|AB|^2 - |CD|^2}{4} = 52.25$.



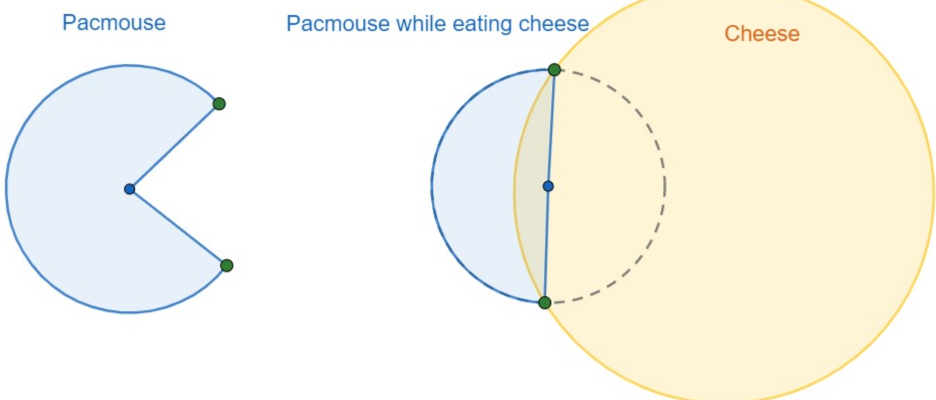
If the ray AD_1 is out of the triangle AOB (see picture below), we get $S_{ABD_1} \approx 77.13$.



Task 4.

1. Пакмыши живут на плоскости и едят круглые сыры. Форма пакмыши (см. рисунок) – круг: когда пакмышь ест, ровно половину этого круга составляют страшные зубастые челюсти. Пакмышь может откусить все, что в неё войдёт. Пакмышь всегда честная (в команде она откусывает поровну с другими пакмышами) и рациональная (откусывает самый большой из возможных кусков и знает, как это сделать). Пакмышь наелась, если откусила от сыра столько, сколько может откусить от него в одиночку.
   Две одинаковые пакмыши нашли круглый сыр диаметра 6 и кусают его одновременно один раз. Найдите наименьшую возможную площадь оставшегося куска сыра, если известно, что пакмыши наелись.

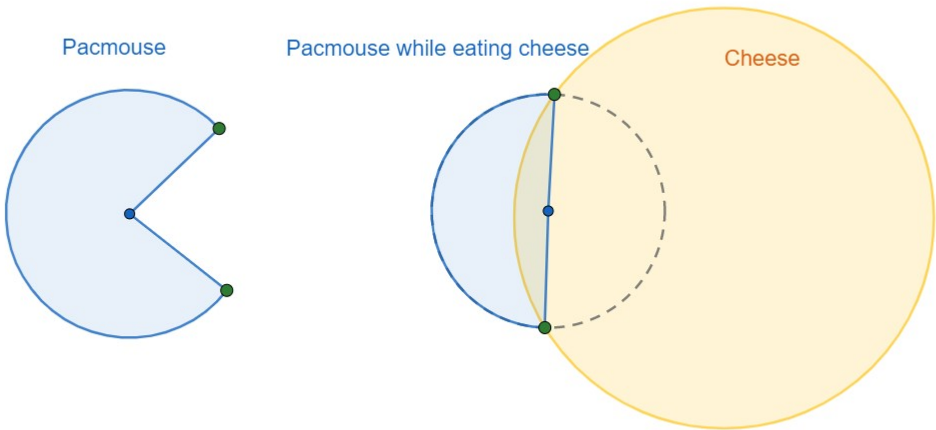
   Pacmouses live on a plane and eat round cheeses. Shape of a pacmouse (see picture) is a circle: when the pacmouse eats, exactly half of this circle is made up of terrible toothy jaws, and pacmouse can bite off everything that enters it. Pacmouse is always honest (in a team, it bites off equally with other pacmouses) and rational (bites off the largest possible piece and knows how to do it). Pacmouse is well-fed if it bit off as much cheese as it could bite off eating alone.
   Two identical pacmouses found a round cheese with the diameter 6 and bite it once at the same time. Find the smallest possible area of the remaining piece of cheese if it is known that the pacmouses are well-fed.



Answer: 9

2. Пакмыши живут на плоскости и едят круглые сыры. Форма пакмыши (см. рисунок) – круг: когда пакмышь ест, ровно половину этого круга составляют страшные зубастые челюсти. Пакмышь может откусить все, что в неё войдёт. Пакмышь всегда честная (в команде она откусывает поровну с другими пакмышами) и рациональная (откусывает самый большой из возможных кусков и знает, как это сделать). Пакмышь наелась, если откусила от сыра столько, сколько может откусить от него в одиночку.
Две одинаковые пакмыши нашли круглый сыр диаметра 10 и кусают его одновременно один раз. Найдите наименьшую возможную площадь оставшегося куска сыра, если известно, что пакмыши наелись.

Pacmouses live on a plane and eat round cheeses. Shape of a pacmouse (see picture) is a circle: when the pacmouse eats, exactly half of this circle is made up of terrible toothy jaws, and pacmouse can bite off everything that enters it. Pacmouse is always honest (in a team, it bites off equally with other pacmouses) and rational (bites off the largest possible piece and knows how to do it). Pacmouse is well-fed if it bit off as much cheese as it could bite off eating alone.
Two identical pacmouses found a round cheese with the diameter 10 and bite it once at the same time. Find the smallest possible area of the remaining piece of cheese if it is known that the pacmouses are well-fed.

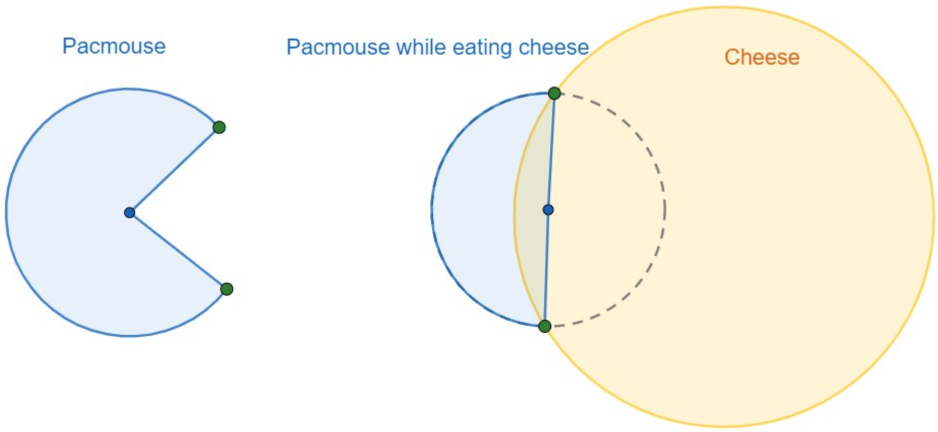


Answer: 25

3. Пакмыши живут на плоскости и едят круглые сыры. Форма пакмыши (см. рисунок) – круг: когда пакмышь ест, ровно половину этого круга составляют страшные зубастые челюсти. Пакмышь может откусить все, что в неё войдёт. Пакмышь всегда честная (в команде она откусывает поровну с другими пакмышами) и рациональная (откусывает самый большой из возможных кусков и знает, как это сделать). Пакмышь наелась, если откусила от сыра столько, сколько может откусить от него в одиночку.
Две одинаковые пакмыши нашли круглый сыр диаметра 12 и кусают его одновременно один раз. Найдите наименьшую возможную площадь оставшегося куска сыра, если известно, что пакмыши наелись.

Pacmouses live on a plane and eat round cheeses. Shape of a pacmouse (see picture) is a circle: when the pacmouse eats, exactly half of this circle is made up of terrible toothy jaws, and pacmouse

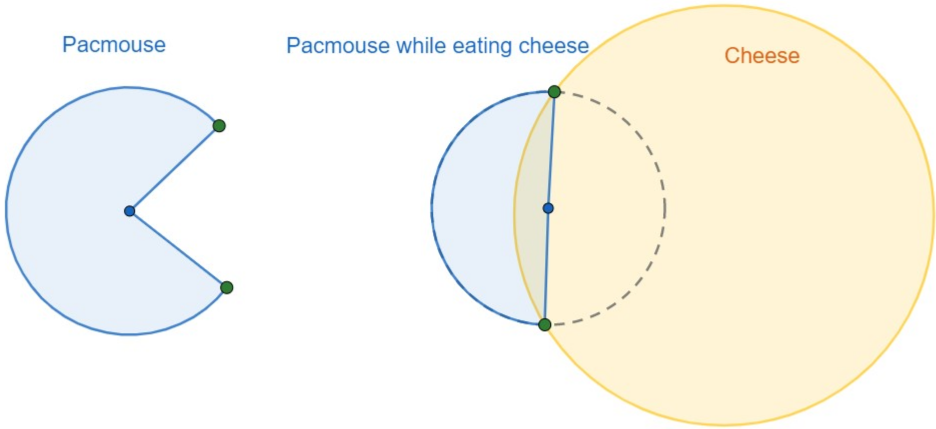
can bite off everything that enters it. Pacmouse is always honest (in a team, it bites off equally with other pacmouses) and rational (bites off the largest possible piece and knows how to do it). Pacmouse is well-fed if it bit off as much cheese as it could bite off eating alone.
Two identical pacmouses found a round cheese with the diameter 12 and bite it once at the same time. Find the smallest possible area of the remaining piece of cheese if it is known that the pacmouses are well-fed.



Answer: 36

4. Пакмыши живут на плоскости и едят круглые сыры. Форма пакмыши (см. рисунок) – круг: когда пакмышь ест, ровно половину этого круга составляют страшные зубастые челюсти. Пакмышь может откусить все, что в неё войдёт. Пакмышь всегда честная (в команде она откусывает поровну с другими пакмышами) и рациональная (откусывает самый большой из возможных кусков и знает, как это сделать). Пакмышь наелась, если откусила от сыра столько, сколько может откусить от него в одиночку.
Две одинаковые пакмыши нашли круглый сыр диаметра 8 и кусают его одновременно один раз. Найдите наименьшую возможную площадь оставшегося куска сыра, если известно, что пакмыши наелись.

Pacmouses live on a plane and eat round cheeses. Shape of a pacmouse (see picture) is a circle: when the pacmouse eats, exactly half of this circle is made up of terrible toothy jaws, and pacmouse can bite off everything that enters it. Pacmouse is always honest (in a team, it bites off equally with other pacmouses) and rational (bites off the largest possible piece and knows how to do it). Pacmouse is well-fed if it bit off as much cheese as it could bite off eating alone.
Two identical pacmouses found a round cheese with the diameter 8 and bite it once at the same time. Find the smallest possible area of the remaining piece of cheese if it is known that the pacmouses are well-fed.



Answer: 16

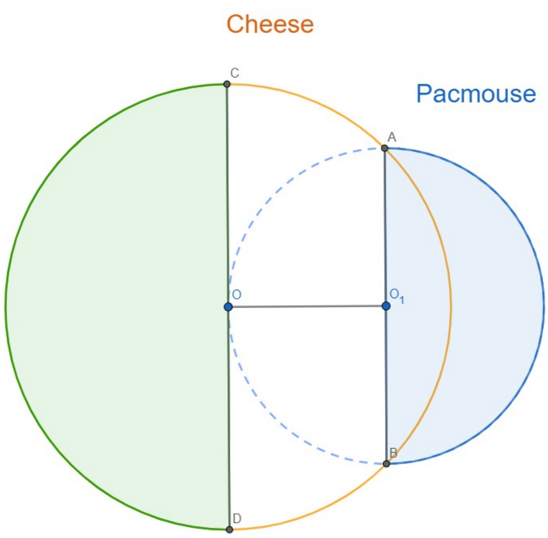
Solution (RUS). Пакмышей две, и они честные и рациональные – значит, у одной мыши в распоряжении полкруга (на рисунке вторая половина зеленая).
Обозначим диаметр пакмышки d, радиус r, для сыра - D и R соответсвенно. Пакмышь наелась, значит, $|AB| = d$ (A и B - крайние точки выгрызенного куска на корке сыра). Нас интересует максимально возможный диаметр, значит, нас интересует случай, когда челюсти пакмыши сомкнулись в центре сыра (окружность радиуса r с центром в точке O_1 коснулась диаметра CD окружности с центром в точке O). Тогда треугольник OO_1A прямоугольный равнобедренный, и $r = OO_1 = O_1A = \frac{\sqrt{2}}{2}R$, то есть, $d = \frac{\sqrt{2}}{2}D$.
Обозначим площадь съеденного куска S_{CK}, S_C - площадь сыра (окружности с центром O радиуса R), S_M - площадь пакмыши (окружности с центром O_1 радиуса r), S_{AB} - площадь меньшего кругового сегмента сыра, отсечённого хордой AB. Тогда:

$$S_{CK} = \frac{S_M}{2} + S_{AB}$$

$$S_{AB} = \frac{S_C - 2R^2}{4}$$

Площадь оставшегося куска

$$S_{OK} = S_C - 2S_{CK} = S_C - 2\left(\frac{S_M}{2} + \frac{S_C - 2R^2}{4}\right) = \frac{S_C}{2} + R^2 - S_M = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)R^2 - \pi r^2 = R^2 = \frac{D^2}{4}$$



Solution (ENG). There are two pacmouses, and they are honest and rational, which means that one mouse has half a circle at its disposal (the second half is green in the picture above).
Let's denote the diameter of the pacmouse d, the radius r, for cheese - D and R respectively. Pacmouse is well-fed, so $|AB| = d$ (A and B are the extreme points of the gnawed piece on the cheese crust). We are interested in the maximum possible diameter, so we are interested in the case when the jaws of the pacmouse closed in the center of the cheese (circle the radius r centered at point O_1 touched the diameter CD of the circle centered at point O). Then the triangle OO_1A is rectangular isosceles, and $r = OO_1 = O_1A = \frac{\sqrt{2}}{2}R$, that is, $d = \frac{\sqrt{2}}{2}D$.
Let's denote the area of the eaten piece S_{CK}, S_C is the area of cheese (circles centered on O of radius R), S_M is the area of pacmouse (circles centered on O_1 of radius r), S_{AB} is the area of a smaller circular segment cheese cut off by the chord AB. Then:

$$S_{CK} = \frac{S_M}{2} + S_{AB}$$

$$S_{AB} = \frac{S_C - 2R^2}{4}$$

The area of the remaining piece

$$S_{OK} = S_C - 2S_{CK} = S_C - 2\left(\frac{S_M}{2} + \frac{S_C - 2R^2}{4}\right) = \frac{S_C}{2} + R^2 - S_M = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)R^2 - \pi r^2 = R^2 = \frac{D^2}{4}$$

Task 5.

1. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 7×7 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 7×7. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

2. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 10×10 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 10×10. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

3. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 9×9 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить

себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 9×9. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

4. Петя и Витя играют в игру, по очереди закрашивая в клетчатом квадрате 8×8 по клеточкам прямоугольники размера 1×1, 1×2 и 2×2 каждый в свой цвет (у Пети – красный, у Вити – зеленый). Перекрашивать клетки нельзя, изначально все игровое поле белое, незакрашенное. Кто не может сделать очередной ход, тот проигрывает. Может ли кто-то из них обеспечить себе победу независимо от игры соперника? Как ему следует действовать?

   Peter and Victor are playing a game, taking turns in painting out rectangles of size 1×1, 1×2 и 2×2 in a checkered square of size 8×8. Each of the players paints in their own color (Peter's color is red, and Victor's green). Recoloring already colored cells is not allowed, initially the entire playing square is white (uncolored). Whoever cannot perform the next move loses. Can either of the players guarantee his victory regardless of the opponent's game? If so, how should he play?

Solution (RUS). См. решение задачи №6 для 7 класса.

Solution (ENG). See solution of the task 6 for the 7th degree.

Task 6.

1. Последовательность многочленов $P_n(x)$, где $n \geq 0$ – целое число, задана рекуррентно: $P_0(x)$ тождественно равен единице (то есть $P_0(x) \equiv 1$), и $P_{n+1}(x) = x^{7(n+1)} - P_n(x)$ для всех $n \geq 0$. Для каждого $n \geq 0$ найти все вещественные корни $P_n(x)$.

   A sequence of polynomials $P_n(x)$ (for all integer $n \geq 0$) is given as $P_0(x) \equiv 1$ and $P_{n+1}(x) = x^{7(n+1)} - P_n(x)$ for all $n \geq 0$. Find all real roots of $P_n(x)$ for an arbitrary integer $n \geq 0$.

2. Последовательность многочленов $P_n(x)$, где $n \geq 0$ – целое число, задана рекуррентно: $P_0(x)$ тождественно равен единице (то есть $P_0(x) \equiv 1$), и $P_{n+1}(x) = x^{11(n+1)} - P_n(x)$ для всех $n \geq 0$. Для каждого $n \geq 0$ найти все вещественные корни $P_n(x)$.

   A sequence of polynomials $P_n(x)$ (for all integer $n \geq 0$) is given as $P_0(x) \equiv 1$ and $P_{n+1}(x) = x^{11(n+1)} - P_n(x)$ for all $n \geq 0$. Find all real roots of $P_n(x)$ for an arbitrary integer $n \geq 0$.

3. Последовательность многочленов $P_n(x)$, где $n \geq 0$ – целое число, задана рекуррентно: $P_0(x)$ тождественно равен единице (то есть $P_0(x) \equiv 1$), и $P_{n+1}(x) = x^{17(n+1)} - P_n(x)$ для всех $n \geq 0$. Для каждого $n \geq 0$ найти все вещественные корни $P_n(x)$.

   A sequence of polynomials $P_n(x)$ (for all integer $n \geq 0$) is given as $P_0(x) \equiv 1$ and $P_{n+1}(x) = x^{17(n+1)} - P_n(x)$ for all $n \geq 0$. Find all real roots of $P_n(x)$ for an arbitrary integer $n \geq 0$.

4. Последовательность многочленов $P_n(x)$, где $n \geq 0$ – целое число, задана рекуррентно: $P_0(x)$ тождественно равен единице (то есть $P_0(x) \equiv 1$), и $P_{n+1}(x) = x^{5(n+1)} - P_n(x)$ для всех $n \geq 0$. Для каждого $n \geq 0$ найти все вещественные корни $P_n(x)$.

   A sequence of polynomials $P_n(x)$ (for all integer $n \geq 0$) is given as $P_0(x) \equiv 1$ and $P_{n+1}(x) = x^{5(n+1)} - P_n(x)$ for all $n \geq 0$. Find all real roots of $P_n(x)$ for an arbitrary integer $n \geq 0$.

Solution (RUS). *(решение варианта 1, остальные решаются аналогично)*
Отдельно рассмотрим четные и нечетные значения $n \geq 0$.
Пусть $n = 2k+1 > 0$ – произвольное нечетное целое. Тогда многочлен $P_n(x)$ имеет вид $x^{7(2k+1)} - x^{7 \cdot 2k} + \cdots + x^7 - 1 = x^{14k}(x^7 - 1) + \cdots + (x^7 - 1) = (x^7 - 1) \cdot (x^{14k} + x^{14(k-1)} + \cdots + x^{14} + 1)$.
Легко заметить, что $x = 1$ – единственный корень этого многочлена (т.к. $x^{14k} + x^{14(k-1)} + \cdots + x^{14} + 1 \geq 1$ для любого вещественного x).
Пусть $n = 2k > 0$ – произвольное четное целое. Тогда многочлен $P_n(x)$ имеет вид $x^{7 \cdot 2k} - x^{7 \cdot 2k - 7} + \cdots - x^7 + 1$. Докажем, что уравнение $x^{7 \cdot 2k} - x^{7 \cdot 2k - 7} + \cdots - x^7 + 1 = 0$ не имеет решений в вещественных числах.
Для этого предположим противное, то есть что есть такое вещественное число x, для которого верно равенство $x^{7 \cdot 2k} - x^{7 \cdot 2k - 7} + \cdots - x^7 + 1 = 0$.
1) x не может быть ≤ 0 или ≥ 1, т.к. $x^{7 \cdot 2k} - x^{7 \cdot 2k - 7} + \cdots - x^7 + 1 \geq 1$ для таких x.
2) Если же $0 < x < 1$ и $x^{7 \cdot 2k} - x^{7 \cdot 2k - 7} + \cdots - x^7 + 1 = 0$, то $(x^7 - 1)(x^{7 \cdot 2k - 7} + x^{7 \cdot 2k - 21} + \cdots + x^7) = -1$ и $x^{7 \cdot 2k - 7} + x^{7 \cdot 2k - 21} + \cdots + x^7 = \frac{1}{1 - x^7}$. Слева в этом равенстве стоит сумма конечного числа элементов геометрической прогрессии со знаменателем $0 < x < 1$, а справа стоит полная сумма (бесконечного числа элементов) бесконечно убывающей прогрессии. Равенство этих сумм невозможно. Таким образом, предположение, что уравнение $x^{7 \cdot 2k} - x^{7 \cdot 2k - 7} + \cdots - x^7 + 1 = 0$ имеет решение в вещественных числах во всех случаях привело нас к противоречию. Следовательно, предположение неверно, а уравнение не имеет решений в вещественных числах.
Значит, для любого нечетного $n \geq 0$ многочлен $P_n(x)$ имеет единственный вещественный (не кратный) корень $x = 1$, а для любого четного $n \geq 0$ многочлен $P_n(x)$ не имеет вещественных корней.

Solution (ENG). *(solution of version 1, the others are solved similarly)*
Separately consider the even and odd values of $n \geq 0$.
Let $n = 2k+1 > 0$ be an arbitrary odd integer. Then the polynomial $P_n(x)$ has the form $x^{7(2k+1)} - x^{7 \cdot 2k} + \cdots + x^7 - 1 = x^{14k}(x^7 - 1) + \cdots + (x^7 - 1) = (x^7 - 1) \cdot (x^{14k} + x^{14(k-1)} + \cdots + x^{14} + 1)$.
It is easy to notice that $x = 1$ is the only root of this polynomial (because $x^{14k} + x^{14(k-1)} + \cdots + x^{14} + 1 \geq 1$ for any real x).
Let $n = 2k > 0$ be an arbitrary even integer. Then the polynomial $P_n(x)$ has the form $x^{7 \cdot 2k} - x^{7 \cdot 2k - 7} + \cdots - x^7 + 1$. We prove that the equation $x^{7 \cdot 2k} - x^{7 \cdot 2k - 7} + \cdots - x^7 + 1 = 0$ has no solutions in real numbers.
To do this, assume the opposite, that is, that there is a real number x for which the equality $x^{7 \cdot 2k} - x^{7 \cdot 2k - 7} + \cdots - x^7 + 1 = 0$ is true.
1) x cannot be ≤ 0 or ≥ 1 because $x^{7 \cdot 2k} - x^{7 \cdot 2k - 7} + \cdots - x^7 + 1 \geq 1$ for such x.
2) If $0 < x < 1$ and $x^{7 \cdot 2k} - x^{7 \cdot 2k - 7} + \cdots - x^7 + 1 = 0$, then $(x^7 - 1)(x^{7 \cdot 2k - 7} + x^{7 \cdot 2k - 21} + \cdots + x^7) = -1$ and $x^{7 \cdot 2k - 7} + x^{7 \cdot 2k - 21} + \cdots + x^7 = \frac{1}{1 - x^7}$. On the left in this equation is the (finite) sum of the elements of the geometric progression with the denominator $0 < x < 1$, and on the right is the total (infinite) sum of the progression. Equality of these amounts is impossible. Thus, the assumption that the equation $x^{7 \cdot 2k} - x^{7 \cdot 2k - 7} + \cdots - x^7 + 1 = 0$ has a solution in real numbers in all cases has inoculated us to a contradiction. Therefore, the assumption is incorrect, and the equation has no solutions in real numbers.
Thus, for any odd $n \geq 0$, the polynomial $P_n(x)$ has a single real (non-multiple) root $x = 1$, and for any even $n \geq 0$, the polynomial $P_n(x)$ has no real roots.

10-12 degree

Task 1.

1. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB. Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD, причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 12, CD = 7$.

   Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB. The points C and D are located on the segments AO, OB, respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD, moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 12, CD = 7$.

   Answer: 23.75

2. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB. Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD, причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 10, CD = 9$.

   Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB. The points C and D are located on the segments AO, OB, respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD, moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 10, CD = 9$.

   Answer: 4.75

3. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB. Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD, причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 15, CD = 4$.

   Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB. The points C and D are located on the segments AO, OB, respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD, moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 15, CD = 4$.

   Answer: 52.25

4. Треугольник AOB – равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB. Точки C и D расположены на отрезках AO, OB соответственно так, что $CD \parallel AB$. Построен $\triangle C_1OD_1$, равный треугольнику COD, причем точки A, C_1, D_1 лежат на одной прямой в указанном порядке. Вычислите площадь $\triangle AD_1B$, если $AB = 16, CD = 13$.

   Triangle AOB is an isosceles right triangle with hypotenuse AB. The points C and D are located on the segments AO, OB, respectively, so that $CD \parallel AB$. $\triangle C_1OD_1$ constructed being equal to triangle COD, moreover, points A, C_1, D_1 lie on one straight line in the specified order. Calculate the area of $\triangle AD_1B$ while $AB = 16, CD = 13$.

Answer: 21.75

Solution (RUS). См. решение задачи №3 для 8-9 кл.

Solution (ENG). See solution of the task 3 for 8-9 degree.

Task 2.

1. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 6 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 6 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

   Answer: 2

2. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 9 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 9 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

   Answer: 3

3. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 4.5 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все

трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 4.5 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

Answer: 1.5

4. Саша, папа и дедушка гуляют в парке по замкнутой дорожке длины 7.5 км. Саша едет на велосипеде со скоростью $5v$, папа бежит трусцой со скоростью $2v$, дедушка идет прогулочным шагом со скоростью v. Саша и папа начали путь одновременно с точки «Старт», а дедушка в этот момент отставал от них на расстояние $d > 0$. Найдите наименьшее d, при котором все трое – Саша, папа и дедушка – встретятся в одной точке. Ответ выразите в километрах.

   Alex, his dad and his grandfather are walking in a park along a round path 7.5 km long. Alex is cycling at a speed of $5v$, his dad is jogging at a speed of $2v$, and his grandfather is walking at a speed of v. Alex and his dad started their walk at the same time from the same «Start» point, and grandfather at that moment was behind them by a distance of $d > 0$. Find the smallest d for which all three – Alex, his dad and his grandfather – will meet at one point. Express the answer in kilometers.

   Answer: 2.5

Solution (RUS). См. решение задачи №4 для 7 кл.

Solution (ENG). See solution of the task 4 for 7th degree.

Task 3.

1. В каждую клетку таблицы 100×100 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 100, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 200, и так далее – в k-ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \ldots, 100k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

   Each cell of the table 100×100 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 100 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 200, and further on – k-th line has numbers $k, 2k, 3k, \ldots, 100k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

   Answer: 2550

2. В каждую клетку таблицы 200×200 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 200, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 400, и так далее – в k-ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \ldots, 200k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

   Each cell of the table 200×200 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 200 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 400, and further on – k-th line has numbers $k, 2k, 3k, \ldots, 200k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

   Answer: 10100

3. В каждую клетку таблицы 150×150 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 150, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 300, и так далее – в k-ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \ldots, 150k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

   Each cell of the table 150×150 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 150 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 300, and further on – k-th line has numbers $k, 2k, 3k, \ldots, 150k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

   Answer: 5700

4. В каждую клетку таблицы 250×250 вписано число: в верхнем ряду слева направо в порядке возрастания записаны все натуральные числа от 1 до 250, во втором ряду сверху в порядке возрастания слева направо записаны все чётные числа от 2 до 500, и так далее – в k-ой сверху строке в порядке возрастания слева направо записаны числа $k, 2k, 3k, \ldots, 250k$. Рассмотрим диагональ, которая идёт из нижнего левого угла в правый верхний. Найдите наибольшее число, записанное в ней.

   Each cell of the table 250×250 has a number: the first row has all positive integers from 1 to 250 in ascending order, the second row has all the even numbers from 2 to 500, and further on – k-th line has numbers $k, 2k, 3k, \ldots, 250k$ in ascending order. Let's consider the diagonal from the bottom left corner to the upper right. Find the largest number it contains.

   Answer: 15750

Solution (RUS). См. решение задачи №2 для 8-9 кл.

Solution (ENG). See solution of the task 2 for 8-9 degree.

Task 4.

1. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
   Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$.
   Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

   - $A_0 = \emptyset$;
   - $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
   - $A_2 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

   Рон заметил, что множество A_0 записывается 1 символом, множество A_1 – 7 символами, множество A_2 – 19 символами. А сколько символов требуется для записи множества A_7?

   Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers as sets.
   Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$.
   Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

   - $A_0 = \emptyset$;
   - $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
   - $A_2 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

   Ron noticed that the A_0 set is written with 1 character, A_1 – with 7 characters, and A_2 set – with 19 characters. How many characters are required to write the set A_7?

   Answer: 763

2. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
   Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$.
   Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

   - $A_0 = \emptyset$;
   - $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
   - $A_2 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

Рон заметил, что множество A_0 записывается 1 символом, множество A_1 – 7 символами, множество A_2 – 19 символами. А сколько символов требуется для записи множества A_8?

Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers as sets.
Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$.
Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

Ron noticed that the A_0 set is written with 1 character, A_1 – with 7 characters, and A_2 set – with 19 characters. How many characters are required to write the set A_8?

Answer: 1531

3. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$.
Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

Рон заметил, что множество A_0 записывается 1 символом, множество A_1 – 7 символами, множество A_2 – 19 символами. А сколько символов требуется для записи множества A_9?

Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers as sets.
Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$.
Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

- $A_0 = \emptyset$;
- $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
- $A_2 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

Ron noticed that the A_0 set is written with 1 character, A_1 – with 7 characters, and A_2 set – with 19 characters. How many characters are required to write the set A_9?

Answer: 3067

4. Рон Уизли повзрослел и понял, что в Хогвартсе он изучил магию, но не изучил математики. Изучение математики он начал с теории множеств и натуральных чисел (включая число 0). Первым делом он задумался, как представить натуральные числа множествами.
Рон рассуждал следующим образом: ноль естественно представлять пустым множеством $\emptyset$. Ну а если для какого-либо натурального числа $n \geq 0$ представление этого числа A_n уже построено, то попробуем представить следующее число $(n+1)$ множеством $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$.
Рон Уизли не поленился и выписал представление трех первых (начиная с 0) натуральных чисел:

   - $A_0 = \emptyset$;
   - $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
   - $A_2 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

   Рон заметил, что множество A_0 записывается 1 символом, множество A_1 – 7 символами, множество A_2 – 19 символами. А сколько символов требуется для записи множества A_6?

   Ron Weasley grew up and realized that at Hogwarts he studied magic, but did not study mathematics. He began studying mathematics with the theory of sets and natural numbers (non-negative integers including the number 0). First of all, he thought about how to represent natural numbers as sets.
Ron reasoned as follows: zero is naturally represented by the empty set $\emptyset$. Well, if for some integer $n \geq 0$ the representation of this number A_n has already been constructed, then we represent the next number $(n+1)$ by the set $A_{n+1} = \{A_n, \{A_n\}\}$.
Ron Weasley wrote out the representation of the first three (starting from 0) non-negative integers:

   - $A_0 = \emptyset$;
   - $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$;
   - $A_2 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

   Ron noticed that the A_0 set is written with 1 character, A_1 – with 7 characters, and A_2 set – with 19 characters. How many characters are required to write the set A_6?

Answer: 379

Solution (RUS). Пусть a_n - количество в символов в записи A_n.
Для начала рассмотрим формулу для $a_{n+2} = 1$(открывающая скобка) $+ a_{n+1} + 1$(запятая) $+ 1$(открывающая скобка) $+ a_{n+1} + 1$(закрывающая скобка)$+ 1$(закрывающая скобка) $= 2a_{n+1} + 5 = 2(2a_n + 5) + 5 = 2^2 a_n + 2^1 \cdot 5 + 2^0 \cdot 5 = 2^2(2a_{n-1} + 5) + 2^1 \cdot 5 + 2^0 \cdot 5 = 2^3 a_{n-1} + 2^2 \cdot 5 + 2^1 \cdot 5 + 2^0 \cdot 5 = 2^3 a_{n-1} + 5\frac{2^3-1}{2-1}$(сумма геометрической прогрессии).
На этом основании можно выдвинуть гипотезу:
формула для общего члена последовательности имеет длину $a_n = 2^n a_0 + 5\frac{2^n-1}{2-1} = 6 \cdot 2^n - 5$
Докажем эту формулу индукцией по $n > 0$.

База индукции: $a_0 = 1 = 6 \cdot 2^0 - 5$
Предположение индукции: $a_n = 6 \cdot 2^n - 5$
Шаг индукции: $a_{n+1} = 2a_n + 5 = 2 \cdot (6 \cdot 2^n - 5) + 5 = 6 \cdot 2^{n+1} - 10 + 5 = 6 \cdot 2^{n+1} - 5$
Таким образом, $a_n = 6 \cdot 2^n - 5$.

Solution (ENG). Let a_n be the number of characters in the entry A_n.
To begin with, consider the formula for $a_{n+2} = 1$(opening curly brace) + a_{n+1}+1(comma) + 1(opening curly brace) + a_{n+1} +1(closing curly brace)+ 1(closing curly brace) $= 2a_{n+1} + 5 = 2(2a_n + 5) + 5 = 2^2 a_n + 2^1 \cdot 5 + 2^0 \cdot 5 = 2^2(2a_{n-1} + 5) + 2^1\ cdot 5 + 2^0 \cdot 5 = 2^3 a_{n-1} + 2^2 \cdot 5 + 2^1 \cdot 5 + 2^0 \cdot 5 = 2^3 a_{n-1} + 5\frac{2^3-1}{2-1}$(the sum of the geometric progression).
On this basis, we can hypothesize:
formula for a common term of a sequence has length $a_n = 2^n a_0 + 5\frac{2^n-1}{2-1} = 6 \cdot 2^n - 5$
Let's prove this formula by induction on $n > 0$.
Induction base: $a_0 = 1 = 6 \cdot 2^0 - 5$
Induction assumption: $a_n = 6 \cdot 2^n - 5$
Induction step: $a_{n+1} = 2a_n + 5 = 2 \cdot (6 \cdot 2^n - 5) + 5 = 6 \cdot 2^{n+1} - 10 + 5 = 6 \cdot 2^{n+1} - 5$
Thus, $a_n = 6 \cdot 2^n - 5$.

Task 5.

1. Решите для положительных вещественных x:
$$x^{x^5} = 100$$
Solve for real $x > 0$:
$$x^{x^5} = 100$$
2. Решите для положительных вещественных x:
$$x^{x^6} = 144$$
Solve for real $x > 0$:
$$x^{x^6} = 144$$
3. Решите для положительных вещественных x:
$$x^{x^3} = 729$$
Solve for real $x > 0$:
$$x^{x^3} = 729$$
4. Решите для положительных вещественных x:
$$x^{x^7} = 196$$
Solve for real $x > 0$:
$$x^{x^7} = 196$$

Solution (RUS). *(решение варианта 1, остальные решаются аналогично)*
Рассмотрим функцию $f(x) = x^x$ для вещественных x и докажем, что она монотонно возрастает при $x > 1$. Итак, $f'(x) = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1)$. Для $x > 1$ имеем $\ln x > 0 > -1$, откуда $f'(x) > 0$, из чего следует монотонное возрастание $f(x)$ для $x > 1$.

Заметим, что при $0 < x \leq 1$ функция $f(x)$ принимает значения, не превосходящие 1 (число, меньшее 1, возводится в положительную степень). Из всего сказанного следует, что уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного положительного корня при $a > 1$.

Теперь решим уравнение $x^{x^5} = 100$, сначала преобразовав его к виду $(x^{x^5})^5 = 100^5 = 10^{10} \Rightarrow (x^5)^{x^5} = 10^{10} \Rightarrow f(x^5) = 10^{10} > 1$ для введенной ранее функции $f(x)$. Заметим, что это уравнение имеет корень $x = \sqrt[5]{10}$, при этом (согласно доказанному выше) других положительных корней у него нет.

Solution (ENG). *(solution of version 1, the others are solved similarly)*
Consider the function $f(x) = x^x$ for real x and prove that it is monotonically increasing for $x > 1$. We have $f'(x) = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1)$. For $x > 1$ we have $\ln x > 0 > -1$, whence $f'(x) > 0$, which implies the monotonically increasing of $f(x)$ for $x > 1$.
Note that for $0 < x \leq 1$ the function $f(x)$ takes values not exceeding 1 (a number no bigger than 1 is raised to a positive power). It follows from the above that the equation $f(x) = a$ has at most one positive root for $a > 1$.

Now lets solve the equation $x^{x^5} = 100$ by first converting it to the form $(x^{x^5})^5 = 100^5 = 10^{10} \Rightarrow (x^5)^{x^5} = 10^{10} \Rightarrow f(x^5) = 10^{10} > 1$ for the previously defined function $f(x)$. Note that this equation has a root $x = \sqrt[5]{10}$, while (according to what has been proven above) it has no other positive roots.

Task 6.

1. В математической лаборатории стояла большая тарелка, которую сотрудники решили превратить в арт-объект: они отметили чёрным маркером 20 точек, а затем, вооружившись цветными маркерами пяти цветов, соединили каждую пару точек линией одного из этих пяти цветов. Докажите, что на этом арт-объекте можно стереть все линии какого-то одного цвета так, чтобы от любой отмеченной точки всё ещё можно было добраться до любой другой, двигаясь вдоль оставшихся линий.

   There was a large plate in the mathematical laboratory, which the staff decided to turn into an object of art: they marked 20 points with a black marker, and then, using five colored markers, connected each pair of points with a line of one of these five colors. Prove that on this art object it is possible to erase all lines of some one color so that from any marked point it is still possible to get to any other by moving along the remaining lines.

2. В математической лаборатории стояла большая тарелка, которую сотрудники решили превратить в арт-объект: они отметили чёрным маркером 30 точек, а затем, вооружившись цветными маркерами четырех цветов, соединили каждую пару точек линией одного из этих четырех цветов. Докажите, что на этом арт-объекте можно стереть все линии какого-то одного цвета так, чтобы от любой отмеченной точки всё ещё можно было добраться до любой другой, двигаясь вдоль оставшихся линий.

   There was a large plate in the mathematical laboratory, which the staff decided to turn into an object of art: they marked 30 points with a black marker, and then, using four colored markers, connected each pair of points with a line of one of these four colors. Prove that on this art object it is possible to erase all lines of some one color so that from any marked point it is still possible to get to any other by moving along the remaining lines.

3. В математической лаборатории стояла большая тарелка, которую сотрудники решили превратить в арт-объект: они отметили чёрным маркером 40 точек, а затем, вооружившись

цветными маркерами шести цветов, соединили каждую пару точек линией одного из этих шести цветов. Докажите, что на этом арт-объекте можно стереть все линии какого-то одного цвета так, чтобы от любой отмеченной точки всё ещё можно было добраться до любой другой, двигаясь вдоль оставшихся линий.

There was a large plate in the mathematical laboratory, which the staff decided to turn into an object of art: they marked 40 points with a black marker, and then, using six colored markers, connected each pair of points with a line of one of these six colors. Prove that on this art object it is possible to erase all lines of some one color so that from any marked point it is still possible to get to any other by moving along the remaining lines.

4. В математической лаборатории стояла большая тарелка, которую сотрудники решили превратить в арт-объект: они отметили чёрным маркером 50 точек, а затем, вооружившись цветными маркерами трех цветов, соединили каждую пару точек линией одного из этих трех цветов. Докажите, что на этом арт-объекте можно стереть все линии какого-то одного цвета так, чтобы от любой отмеченной точки всё ещё можно было добраться до любой другой, двигаясь вдоль оставшихся линий.

   There was a large plate in the mathematical laboratory, which the staff decided to turn into an object of art: they marked 50 points with a black marker, and then, using three colored markers, connected each pair of points with a line of one of these three colors. Prove that on this art object it is possible to erase all lines of some one color so that from any marked point it is still possible to get to any other by moving along the remaining lines.

Solution (RUS). *(решение варианта 1, остальные решаются аналогично)*
Рассмотрим произвольные 4 цвета из пяти. Пятый цвет назовём цвет A. Перекрасим линии, проведённые каждым из выбранных четырёх цветов в некоторый новый цвет, который назовём цвет B и будем доказывать задачу из условия для двух цветов.
Отмеченные точки будем называть вершинами, а линии, соединяющие пары точек - рёбрами. Пусть неверно, что каждая вершина соединена с любой другой некоторым путём цвета A. Тогда есть конкретные две вершины v_1 и v_2, которые не соединены ни одним путём целиком состоящим из рёбер цвета A. Пусть тогда V_1 - это группа всех вершин, в которые можно попасть из v_1 только по рёбрам цвета A, а V_2 - остальные вершины, то есть те, до которых по рёбрам цвета A из v_1 попасть невозможно. Тогда легко видеть, что, во-первых, v_1 принадлежит V_1, а v_2 принадлежит V_2. Во-вторых, из V_1 в V_2 не идёт ни одного ребра цвета A, иначе V_1 содержит не все вершины, которые должна содержать по определению (которые достижимы по рёбрам цвета A из v_1). Но группы V_1 и V_2 вместе составляют все вершины, обе эти две группы непусты, а также все рёбра между вершинами этих групп (когда одна вершина из одной группы, а другая - из другой) имеют цвет B.
Тогда очевидно, что любые две вершины связаны друг с другом путём цвета B (причём состоящим не более чем из двух рёбер), что и требовалось доказать.

Solution (ENG). *(solution of version 1, the others are solved similarly)*
Consider arbitrary 4 colors out of five. The fifth color will be called the color A. We will recolor the lines drawn by each of the selected four colors into some new color, which we will call the color B and we will prove the problem from the condition for two colors.
The marked points will be called vertices, and the lines connecting pairs of points will be called edges. Suppose it is not true that each vertex is connected to any other by some path of the color A. Then there are specific two vertices v_1 and v_2 that are not connected by any path consisting entirely of edges of the color A. Let then V_1 be the group of all vertices in which can be reached from v_1 only by the

edges of the color A, and V_2 are the other vertices, that is, those that cannot be reached by the edges of the color A from v_1. Then it is easy to see that, firstly, v_1 belongs to V_1, and v_2 belongs to V_2. Secondly, not a single edge of the color A goes from V_1 to V_2, otherwise V_1 does not contain all the vertices that it should contain by definition (which are reachable by edges of the color A from v_1). But the groups V_1 and V_2 are together make up all the vertices, both of these two groups are non-empty, as well as all the edges between the vertices of these groups (when one vertex is from one group and the other is from another) have the color B.

Then it is obvious that any two vertices are connected to each other by a path of color B (and consisting of no more than two edges), which was required to be proved.