7^{th} degree

Task 1.

1. Хромая ладья (может передвигаться по горизонтали или вертикали, но только на одну клетку за ход), находясь в черной клетке, мгновенно перекрашивает все соседние белые клетки в красный цвет. Какое наибольшее число клеток бесконечной шахматной доски можно перекрасить в красный цвет, сделав 40 ходов хромой ладьей? Изначально хромая ладья находилась в белой клетке.

   A lame rook (can move horizontally or vertically, but only one square per move), being in a black cell, instantly repaints all adjacent white cells into red color. What is the largest number of squares on an infinite chessboard that can be repainted with red by making 40 moves with a lame rook? Initially, the lame rook was in a white square.

   Answer: 61

2. Хромая ладья (может передвигаться по горизонтали или вертикали, но только на одну клетку за ход), находясь в черной клетке, мгновенно перекрашивает все соседние белые клетки в красный цвет. Какое наибольшее число клеток бесконечной шахматной доски можно перекрасить в красный цвет, сделав 50 ходов хромой ладьей? Изначально хромая ладья находилась в белой клетке.

   A lame rook (can move horizontally or vertically, but only one square per move), being in a black cell, instantly repaints all adjacent white cells into red color. What is the largest number of squares on an infinite chessboard that can be repainted with red by making 50 moves with a lame rook? Initially, the lame rook was in a white square.

   Answer: 76

3. Хромая ладья (может передвигаться по горизонтали или вертикали, но только на одну клетку за ход), находясь в черной клетке, мгновенно перекрашивает все соседние белые клетки в красный цвет. Какое наибольшее число клеток бесконечной шахматной доски можно перекрасить в красный цвет, сделав 45 ходов хромой ладьей? Изначально хромая ладья находилась в белой клетке.

   A lame rook (can move horizontally or vertically, but only one square per move), being in a black cell, instantly repaints all adjacent white cells into red color. What is the largest number of squares on an infinite chessboard that can be repainted with red by making 45 moves with a lame rook? Initially, the lame rook was in a white square.

   Answer: 70

4. Хромая ладья (может передвигаться по горизонтали или вертикали, но только на одну клетку за ход), находясь в черной клетке, мгновенно перекрашивает все соседние белые клетки в красный цвет. Какое наибольшее число клеток бесконечной шахматной доски можно перекрасить в красный цвет, сделав 57 ходов хромой ладьей? Изначально хромая ладья находилась в белой клетке.

   A lame rook (can move horizontally or vertically, but only one square per move), being in a black cell, instantly repaints all adjacent white cells into red color. What is the largest number of squares on an infinite chessboard that can be repainted with red by making 57 moves with a lame rook? Initially, the lame rook was in a white square.

Answer: 88

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Сделав 40 ходов из белой клетки, хромая ладья побывает на 20 черных клетках, каждым ходом меняя цвет клетки, на которой стоит. Каждая черная клетка изначально окружена 4-мя белыми, но та белая, из которой ладья попала в очередную черную, уже перекрашена (за исключением начальной клетки) – значит, каждым ходом в черную клетку (за исключением первого) хромая ладья может перекрасить не более 3-х белых клеток.

Итак, количество белых клеток, которые может перекрасить ладья, не превышает $4+19\cdot 3=61$. Такого количества можно добиться, если не менять направление движения ладьи.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* After making 40 moves from a white square, the lame rook will visit 20 black squares, switching its cell's color each move. Each black cell is initially surrounded by 4 white ones, but the white one from which the rook got into the next black one has already been repainted (except for the initial square), which means that with each move to a black cell (except for the first one) a lame rook can repaint no more than 3 white cells.

So, the number of white cells that the rook can repaint does not exceed $4+19\cdot 3=61$. This amount can be achieved if you do not change the direction of the rook's movement.

Task 2.

1. Сеть автобусных маршрутов города Иннополиса устроена так:

   - общее количество автобусных остановок в городе – 9 штук, и любые две из них соединены дорогой;
   - на каждом маршруте должны быть ровно 3 остановки (включая начало и конец маршрута);
   - любые два автобусных маршрута имеют либо одну общую остановку, либо ни одной.

   Какое наибольшее количество автобусных маршрутов может иметь город Иннополис?

   The bus routes web in the town of Innopolis is built as follows:

   - the total number of bus stops in the town is 9 with any two of them connected with a road;
   - each route must have exactly 3 stops (including the beginning and end of the route);
   - any two bus routes have either one common stop or none.

   What is the largest number of bus routes the town of Innopolis can have?

   Answer: 12

2. Сеть автобусных маршрутов города Иннополиса устроена так:

   - общее количество автобусных остановок в городе – 9 штук, и любые две из них соединены дорогой;
   - на каждом маршруте должны быть ровно 4 остановки (включая начало и конец маршрута);

- любые два автобусных маршрута имеют либо одну общую остановку, либо ни одной.

Какое наибольшее количество автобусных маршрутов может иметь город Иннополис?

The bus routes web in the town of Innopolis is built as follows:

- the total number of bus stops in the town is 9 with any two of them connected with a road;
- each route must have exactly 4 stops (including the beginning and end of the route);
- any two bus routes have either one common stop or none.

What is the largest number of bus routes the town of Innopolis can have?

Answer: 3

3. Сеть автобусных маршрутов города Иннополиса устроена так:

   - общее количество автобусных остановок в городе – 10 штук, и любые две из них соединены дорогой;
   - на каждом маршруте должны быть ровно 3 остановки (включая начало и конец маршрута);
   - любые два автобусных маршрута имеют либо одну общую остановку, либо ни одной.

   Какое наибольшее количество автобусных маршрутов может иметь город Иннополис?

   The bus routes web in the town of Innopolis is built as follows:

   - the total number of bus stops in the town is 10 with any two of them connected with a road;
   - each route must have exactly 3 stops (including the beginning and end of the route);
   - any two bus routes have either one common stop or none.

   What is the largest number of bus routes the town of Innopolis can have?

   Answer: 13

4. Сеть автобусных маршрутов города Иннополиса устроена так:

   - общее количество автобусных остановок в городе – 12 штук, и любые две из них соединены дорогой;
   - на каждом маршруте должны быть ровно 4 остановки (включая начало и конец маршрута);
   - любые два автобусных маршрута имеют либо одну общую остановку, либо ни одной.

   Какое наибольшее количество автобусных маршрутов может иметь город Иннополис?

   The bus routes web in the town of Innopolis is built as follows:

   - the total number of bus stops in the town is 12 with any two of them connected with a road;
   - each route must have exactly 4 stops (including the beginning and end of the route);
   - any two bus routes have either one common stop or none.

What is the largest number of bus routes the town of Innopolis can have?

Answer: 9

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* «Зафиксируем» автобусную остановку X – одну из 9-и. Кроме нее, в городе есть еще 8 остановок, и на каждом автобусном маршруте, проходящем через X, есть еще 2 остановки, причем эти маршруты не могут иметь других общих остановок, кроме X – значит, таких маршрутов не более $8 : 2 = 4$.

Теперь занумеруем автобусные остановки числами от 1 до 9. Пусть в Иннополисе всего n автобусных маршрутов, из них n_1 проходят через остановку 1, n_2 – через остановку 2, и т.д. На каждом маршруте 3 остановки – значит, $n_1 + n_2 + \cdots + n_9 = 3n$, при этом $n_i \leq 4$ для любого i согласно доказанному выше. Следовательно, $3n \leq 4 \cdot 9$, откуда $n \leq 12$.

Покажем, как провести 12 маршрутов (цифры обозначают номера остановок, а трехзначные числа – автобусные маршруты): 123, 456, 789, 147, 258, 369, 249, 168, 267, 348, 159, 357.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Lets «fix» bus stop X – one of the 9. In addition to it, there are 8 more bus stops in the city, and on each bus route passing through X, there are 2 more stops, and these routes cannot have other stops in common except X – therefore, there are no more than $8 : 2 = 4$ such routes.

Now let's enumerate the bus stops with numbers from 1 to 9. Let there be only n bus routes in Innopolis, of which n_1 go through stop 1, n_2 go through stop 2, etc. There are 3 stops on each route – by that, $n_1 + n_2 + \cdots + n_9 = 3n$, while $n_i \leq 4$ for any i according to what was proven above. Therefore, $3n \leq 4 \cdot 9$, thus $n \leq 12$.

Finally, lets show how to establish the 12 routes (digits indicate bus stops, and three-digit numbers indicate bus routes): 123, 456, 789, 147, 258, 369, 249, 168, 267, 348, 159, 357.

Task 3.

1. Дан набор из 10 палочек длины $1, 2, 3, \ldots, 10$ (по одной палочке каждой длины). Сколькими способами можно составить из этих палочек треугольник?

   Given a set of 10 sticks of lengths $1, 2, 3, \ldots, 10$ (one stick of each length). How many ways are there to form a triangle from these sticks?

   Answer: 50

2. Дан набор из 12 палочек длины $1, 2, 3, \ldots, 12$ (по одной палочке каждой длины). Сколькими способами можно составить из этих палочек треугольник?

   Given a set of 12 sticks of lengths $1, 2, 3, \ldots, 12$ (one stick of each length). How many ways are there to form a triangle from these sticks?

   Answer: 95

3. Дан набор из 14 палочек длины $1, 2, 3, \ldots, 14$ (по одной палочке каждой длины). Сколькими способами можно составить из этих палочек треугольник?

   Given a set of 14 sticks of lengths $1, 2, 3, \ldots, 14$ (one stick of each length). How many ways are there to form a triangle from these sticks?

Answer: 161

4. Дан набор из 16 палочек длины $1, 2, 3, \ldots, 16$ (по одной палочке каждой длины). Сколькими способами можно составить из этих палочек треугольник?

   Given a set of 16 sticks of lengths $1, 2, 3, \ldots, 16$ (one stick of each length). How many ways are there to form a triangle from these sticks?

   Answer: 252

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть $1 \le a < b < c \le 10$ – стороны треугольника. Чтобы этот треугольник существовал и был невырожденным, требуется выполнение неравенства треугольника, причем достаточно соблюсти его только для наибольшей стороны: $c < a + b$. Также очевидно, что $c \ge 4$: действительно, если $c = 3$, то $a = 1$, $b = 2$ и треугольник получается вырожденным (все его вершины лежат на одной прямой), а про меньшие c и сказать нечего.

При каждом c число a может меняться от 1 до $b - 1$, при этом $a > c - b$ из неравенства треугольника – значит, a принимает все натуральные значения от $c - b + 1$ до $b - 1$ включительно – итого $b - 1 - (c - b + 1) + 1 = 2b - c - 1$ значений.
Число b должно быть таким, чтобы $2b - c - 1$ было неотрицательным, т.к. $b \ge a + 1 \ge c - b + 1$ – а значит, $\frac{c+1}{2} \le b \le c - 1$.

Значит, количество треугольников, которые можно составить из данных в условии палочек при фиксированном c, равно

$$S_c = \sum_{b \ge (c+1)/2}^{c-1} \big(2b - c - 1\big)$$

Если $c = 2k$ (для некоторого натурального k), то эта сумма равна

$$S_c = \sum_{k+1}^{2k-1} (2b - 2k - 1) = 2 \sum_{k+1}^{2k-1} b - (2k + 1) \sum_{k+1}^{2k-1} 1 = (k - 1)^2 = \frac{1}{4}(c - 2)^2$$

Если же c – нечетное, т.е. $c = 2k - 1$ для некоторого натурального k, то получим сумму

$$S_c = \sum_{k}^{2k-2} (2b - 2k) = 2 \sum_{k}^{2k-2} b - 2k \sum_{k}^{2k-2} 1 = (k - 1)(k - 2) = \frac{1}{4}(c - 1)(c - 3)$$

Осталось подсчитать соответствующие суммы для $c = 4, 5, \ldots, 10$ и сложить их:

$$\sum_{c=4}^{10} S_c = 50$$

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let $1 \le a < b < c \le 10$ be the sides of the triangle. For this triangle to exist and be non-degenerate, the triangle inequality must be satisfied, and it is enough to satisfy it only for the largest side: $c < a + b$. It is also obvious that $c \ge 4$: indeed, if $c = 3$, then $a = 1$, $b = 2$ and the triangle turns out to be degenerate (all its vertices lie on the same line), and there is nothing to say about smaller c.

For each c, the number a can change from 1 to $b - 1$, while $a > c - b$ from the triangle inequality means a takes all positive integer values from $c - b + 1$ up to $b - 1$ – total of $b - 1 - (c - b + 1) + 1 = 2b - c - 1$ values.
The number b must be such that $2b - c - 1$ is non-negative, because $b \ge a + 1 \ge c - b + 1$ – which means $\frac{c+1}{2} \le b \le c - 1$.

By that, the number of triangles that can be formed from the task's formulation for a fixed c is equal to

$$S_c = \sum_{b \geq (c+1)/2}^{c-1} \big(2b - c - 1\big)$$

If $c = 2k$ (for some positive integer k), then this sum is equal to

$$S_c = \sum_{k+1}^{2k-1} (2b - 2k - 1) = 2\sum_{k+1}^{2k-1} b - (2k+1)\sum_{k+1}^{2k-1} 1 = (k-1)^2 = \frac{1}{4}(c-2)^2$$

If c is odd, i.e. $c = 2k - 1$ for some positive integer k, then we get the sum

$$S_c = \sum_{k}^{2k-2} (2b - 2k) = 2\sum_{k}^{2k-2} b - 2k\sum_{k}^{2k-2} 1 = (k-1)(k-2) = \frac{1}{4}(c-1)(c-3)$$

It remains to calculate the corresponding sums for $c = 4, 5, \ldots, 10$ and add them up:

$$\sum_{c=4}^{10} S_c = 50$$

Task 4.

1. В кондитерской есть наборы пирожных по $1, 2, 3, 4, 5$ штук в коробке. Покупатель, пятиголовый пятирук, хочет купить 5 коробок (по одной в каждую руку) так, чтобы общее число пирожных делилось на 5 (поровну каждой голове). Сколькими способами он сможет это сделать? Все пирожные одинаковые, наборы с одинаковым количеством пирожных считаем неразличимыми, каждый набор в кондитерской имеется как минимум в 5 экземплярах, и неважно, какой набор в какой руке находится.

   The bakery has sets of cakes for $1, 2, 3, 4, 5$ pieces per box. The five-headed five-handed buyer wants to buy 5 boxes (one for each hand) such that the total number of cakes in them is divisible by 5 (equally for each head). How many ways there are for the buyer to do this? All cakes are the same; boxes with the same number of cakes are indistinguishable; each box in the bakery is available in at least 5 copies, and it doesn't matter which box which hand holds.

   Answer: 26

2. В кондитерской есть наборы пирожных по $1, 2, 3, 4, 5$ штук в коробке. Покупатель, шестиголовый пятирук, хочет купить 5 коробок (по одной в каждую руку) так, чтобы общее число пирожных делилось на 6 (поровну каждой голове). Сколькими способами он сможет это сделать? Все пирожные одинаковые, наборы с одинаковым количеством пирожных считаем неразличимыми, каждый набор в кондитерской имеется как минимум в 5 экземплярах, и неважно, какой набор в какой руке находится.

   The bakery has sets of cakes for $1, 2, 3, 4, 5$ pieces per box. The six-headed five-handed buyer wants to buy 5 boxes (one for each hand) such that the total number of cakes in them is divisible by 6 (equally for each head). How many ways there are for the buyer to do this? All cakes are the same; boxes with the same number of cakes are indistinguishable; each box in the bakery is available in at least 5 copies, and it doesn't matter which box which hand holds.

   Answer: 20

3. В кондитерской есть наборы пирожных по $1, 2, 3, 4, 5$ штук в коробке. Покупатель, семиголовый пятирук, хочет купить 5 коробок (по одной в каждую руку) так, чтобы общее число пирожных делилось на 7 (поровну каждой голове). Сколькими способами он сможет это сделать? Все пирожные одинаковые, наборы с одинаковым количеством пирожных считаем неразличимыми, каждый набор в кондитерской имеется как минимум в 5 экземплярах, и неважно, какой набор в какой руке находится.

   The bakery has sets of cakes for $1, 2, 3, 4, 5$ pieces per box. The seven-headed five-handed buyer wants to buy 5 boxes (one for each hand) such that the total number of cakes in them is divisible by 7 (equally for each head). How many ways there are for the buyer to do this? All cakes are the same; boxes with the same number of cakes are indistinguishable; each box in the bakery is available in at least 5 copies, and it doesn't matter which box which hand holds.

   Answer: 18

4. В кондитерской есть наборы пирожных по $1, 2, 3, 4, 5$ штук в коробке. Покупатель, восьмиголовый пятирук, хочет купить 5 коробок (по одной в каждую руку) так, чтобы общее число пирожных делилось на 8 (поровну каждой голове). Сколькими способами он сможет это сделать? Все пирожные одинаковые, наборы с одинаковым количеством пирожных считаем неразличимыми, каждый набор в кондитерской имеется как минимум в 5 экземплярах, и неважно, какой набор в какой руке находится.

   The bakery has sets of cakes for $1, 2, 3, 4, 5$ pieces per box. The eight-headed five-handed buyer wants to buy 5 boxes (one for each hand) such that the total number of cakes in them is divisible by 8 (equally for each head). How many ways there are for the buyer to do this? All cakes are the same; boxes with the same number of cakes are indistinguishable; each box in the bakery is available in at least 5 copies, and it doesn't matter which box which hand holds.

   Answer: 15

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Общее количество пирожных, которые может купить пятиголовый пятирук, не меньше 5 (5 наборов по 1 шт.) и не больше 25 (5 наборов по 5 шт.). Чтобы это число делилось на 5, оно должно равняться $n = 5, 10, 15, 20$ или 25. Подсчитаем количество способов набрать соответствующее число пирожных, купив 5 наборов. Для удобства (и чтобы было ясно, что мы ничего не упустили) упорядочим содержания наборов по возрастанию (для каждого n) количеств пирожных в коробках:

- $n = 5$: $1 + 1 + 1 + 1 +$ (1 способ);
- $n = 10$: $1+1+1+2+5 = 1+1+1+3+4 = 1+1+2+2+4 = 1+1+2+3+3 = 1+2+2+2+3 = 2+2+2+2+2$ (6 способов);
- $n = 15$: $1+1+3+5+5 = 1+1+4+4+5 = 1+2+2+5+5 = 1+2+3+4+5 = 1+2+4+4+4 = 1+3+3+3+5 = 1+3+3+4+4 = 2+2+2+4+5 = 2+2+3+3+5 = 2+2+3+4+4 = 2+3+3+3+4 = 3+3+3+3+3$ (12 способов);
- $n = 20$: $1+4+5+5+5 = 2+3+5+5+5 = 2+4+4+5+5 = 3+3+4+5+5 = 3+4+4+4+5 = 4+4+4+4+4$ (6 способов);
- $n = 25$: $5 + 5 + 5 + 5 + 5$ (1 способ).

Итого $1 + 6 + 12 + 6 + 1 = 26$ способов.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* The total number of cakes that a five-headed five-handed customer can buy is not less than 5 (i.e. 5 sets of 1 piece) and not more than 25 (i.e. 5 sets of 5 pieces). For this number to be divisible by 5, it must be equal to $n = 5, 10, 15, 20$ or 25. Let's count the number of ways to get the corresponding number of cakes by purchasing 5 sets. For convenience (and to make it clear that we have not missed anything), we will order the numers of cakes of the sets in ascending order (for each n):

- $n = 5$: $1 + 1 + 1 + 1+$ (1 way);
- $n = 10$: $1+1+1+2+5 = 1+1+1+3+4 = 1+1+2+2+4 = 1+1+2+3+3 = 1+2+2+2+3 = 2+2+2+2+2$ (6 ways);
- $n = 15$: $1+1+3+5+5 = 1+1+4+4+5 = 1+2+2+5+5 = 1+2+3+4+5 = 1+2+4+4+4 = 1+3+3+3+5 = 1+3+3+4+4 = 2+2+2+4+5 = 2+2+3+3+5 = 2+2+3+4+4 = 2+3+3+3+4 = 3+3+3+3+3$ (12 ways);
- $n = 20$: $1+4+5+5+5 = 2+3+5+5+5 = 2+4+4+5+5 = 3+3+4+5+5 = 3+4+4+4+5 = 4+4+4+4+4$ (6 ways);
- $n = 25$: $5 + 5 + 5 + 5 + 5$ (1 way).

Thus, there are $1 + 6 + 12 + 6 + 1 = 26$ ways in total.

Task 5.

1. Людоед поймал двух математиков и сказал им следующее:

   «Завтра я напишу на этой доске полный квадрат натурального числа – некоторое m^2, потом приведу одного из вас, и он допишет справа столько последовательных квадратов $(m+1)^2, (m+2)^2, \ldots$, сколько захочет, но не менее 10. После этого я уведу его и приведу второго: он расставит между выписанными квадратами знаки '+' и '−' по своему усмотрению. Если значение получившегося выражения будет равно нулю, я отпущу вас обоих, а если нет – обоих съем. Времени на переговоры я вам не дам ни сегодня, ни завтра.»

   Смогут ли математики спастись независимо от значения m? Обоснуйте свой ответ.

   The cannibal caught two mathematicians and told them the following:

   «Tomorrow I will write on this board the complete square of a positive integer, i.e. some m^2, then I will bring one of you, and he will add to the right as many consecutive squares $(m+1)^2, (m+2)^2, \ldots$ as he wants, but not less than 10 of them. After that, I will take him away and bring in a second one of you: he will place the signs '+' and '−' between the written squares at his discretion. If the value of the resulting expression will be equal to zero, then I will let you both go, and if the value will not be zero, then I will eat both of you. I won't give you time for discussions either today or tomorrow.»

   Can mathematicians save themselves regardless of the number the cannibal writes down? Explain your answer.

2. Людоед поймал двух математиков и сказал им следующее:

   «Завтра я напишу на этой доске полный квадрат натурального числа – некоторое m^2, потом приведу одного из вас, и он допишет справа столько последовательных квадратов $(m+1)^2, (m+2)^2, \ldots$, сколько захочет, но не менее 30. После этого я уведу его и приведу второго: он расставит между выписанными квадратами знаки '+' и '−' по своему усмотрению. Если значение получившегося выражения будет равно нулю, я отпущу вас обоих, а если нет – обоих съем. Времени на переговоры я вам не дам ни сегодня, ни завтра.»

Смогут ли математики спастись независимо от значения m? Обоснуйте свой ответ.

The cannibal caught two mathematicians and told them the following:

«Tomorrow I will write on this board the complete square of a positive integer, i.e. some m^2, then I will bring one of you, and he will add to the right as many consecutive squares $(m+1)^2, (m+2)^2, \ldots$ as he wants, but not less than 30 of them. After that, I will take him away and bring in a second one of you: he will place the signs '+' and '−' between the written squares at his discretion. If the value of the resulting expression will be equal to zero, then I will let you both go, and if the value will not be zero, then I will eat both of you. I won't give you time for discussions either today or tomorrow.»

Can mathematicians save themselves regardless of the number the cannibal writes down? Explain your answer.

3. Людоед поймал двух математиков и сказал им следующее:

   «Завтра я напишу на этой доске полный квадрат натурального числа – некоторое m^2, потом приведу одного из вас, и он допишет справа столько последовательных квадратов $(m+1)^2, (m+2)^2, \ldots$, сколько захочет, но не менее 17. После этого я уведу его и приведу второго: он расставит между выписанными квадратами знаки '+' и '−' по своему усмотрению. Если значение получившегося выражения будет равно нулю, я отпущу вас обоих, а если нет – обоих съем. Времени на переговоры я вам не дам ни сегодня, ни завтра.»

   Смогут ли математики спастись независимо от значения m? Обоснуйте свой ответ.

   The cannibal caught two mathematicians and told them the following:

   «Tomorrow I will write on this board the complete square of a positive integer, i.e. some m^2, then I will bring one of you, and he will add to the right as many consecutive squares $(m+1)^2, (m+2)^2, \ldots$ as he wants, but not less than 17 of them. After that, I will take him away and bring in a second one of you: he will place the signs '+' and '−' between the written squares at his discretion. If the value of the resulting expression will be equal to zero, then I will let you both go, and if the value will not be zero, then I will eat both of you. I won't give you time for discussions either today or tomorrow.»

   Can mathematicians save themselves regardless of the number the cannibal writes down? Explain your answer.

4. Людоед поймал двух математиков и сказал им следующее:

   «Завтра я напишу на этой доске полный квадрат натурального числа – некоторое m^2, потом приведу одного из вас, и он допишет справа столько последовательных квадратов $(m+1)^2, (m+2)^2, \ldots$, сколько захочет, но не менее 20. После этого я уведу его и приведу второго: он расставит между выписанными квадратами знаки '+' и '−' по своему усмотрению. Если значение получившегося выражения будет равно нулю, я отпущу вас обоих, а если нет – обоих съем. Времени на переговоры я вам не дам ни сегодня, ни завтра.»

   Смогут ли математики спастись независимо от значения m? Обоснуйте свой ответ.

   The cannibal caught two mathematicians and told them the following:

   «Tomorrow I will write on this board the complete square of a positive integer, i.e. some m^2, then I will bring one of you, and he will add to the right as many consecutive squares $(m+1)^2, (m+2)^2, \ldots$ as he wants, but not less than 20 of them. After that, I will take him away and bring in a second one of you: he will place the signs '+' and '−' between the written squares at his discretion. If the value of the resulting expression will be equal to zero, then I will let you both go, and if the value will not be zero, then I will eat both of you. I won't give you time for discussions either today or tomorrow.»

Can mathematicians save themselves regardless of the number the cannibal writes down? Explain your answer.

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Заметим, что для любого n выполнено $n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2=4$. Из этого следует, что $m^2-(m+1)^2-(m+2)^2+(m+3)^2-(m+4)^2+(m+5)^2+(m+6)^2-(m+7)^2=0$ для любого m.

Чтобы спастись, математики могут действовать следующим образом: первый дописывает, например, 95 последовательных квадратов $((m+1)^2,(m+2)^2,\ldots,(m+95)^2)$, а второй расставляет знаки перед ними следующим образом: $--+-++-+$ и т.д., повторяя указанную последовательность восьми знаков. Тогда первые 8 слагаемых дадут в сумме 0, как и следующие 8 слагаемых, и т.д. – общая сумма также будет равна 0.

Критерии оценивания:

- показано, что разности последовательных квадратов – последовательные нечетные числа – 1 балл;
- показано, что разности последовательных квадратов – последовательные нечетные числа, но знаки между квадратами расставлены неверно – 2 балла;
- доказано, что группы по 8 последовательных квадратов могут давать 0, но не указаны знаки между ними – 3 балла;
- приведено решение для 8 квадратов, но не сказано про группы по 8, либо допущена арифметическая ошибка на последнем этапе решения – 4 балла;
- задача решена полностью верно – 5 баллов.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Note that for any n we have $n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2=4$. By that, $m^2-(m+1)^2-(m+2)^2+(m+3)^2-(m+4)^2+(m+5)^2+(m+6)^2-(m+7)^2=0$ for any m.

To save themselves, mathematicians can act as follows: the first one adds, for example, 95 consecutive squares $((m+1)^2,(m+2)^2,\ldots,(m+95)^2)$, and the second one places the signs in front of them as follows: $--+-++-+$, etc., repeating the specified sequence of eight signs. Then the first 8 terms will add up to 0, as will the next 8 terms, etc. – the total sum will also be 0.

Criteria:

- it is shown that the differences of consecutive squares are consecutive odd numbers – 1 point;
- it is shown that the differences between consecutive squares are consecutive odd numbers, but the signs between the squares are placed incorrectly – 2 points;
- it is proven that groups of 8 consecutive squares can give 0, but the signs between them are not indicated – 3 points;
- the solution for 8 squares is given, but not indicated for many group of 8 squares, or an arithmetic error was made at the last stage of the solution – 4 points;
- the solution is full and correct – 5 points.

Task 6.

1. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

   - восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
   - восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
   - ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
   - восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

   Изначально были проблемы с 10 аккаунтами пользователей, и 15 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. Сможет ли Игорь добиться этого? Обоснуйте свой ответ.

   Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

   - restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
   - restore two accounts – then a new question from the user will appear;
   - answer one user question – then two new questions will appear;
   - restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

   Initially, there were problems with 10 user accounts, and 15 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. Can Igor manage to do that? Explain your answer.

2. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

   - восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
   - восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
   - ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
   - восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

   Изначально были проблемы с 14 аккаунтами пользователей, и 15 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. Сможет ли Игорь добиться этого? Обоснуйте свой ответ.

   Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

   - restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
   - restore two accounts – then a new question from the user will appear;
   - answer one user question – then two new questions will appear;

- restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

Initially, there were problems with 14 user accounts, and 15 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. Can Igor manage to do that? Explain your answer.

3. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

   - восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
   - восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
   - ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
   - восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

   Изначально были проблемы с 12 аккаунтами пользователей, и 17 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. Сможет ли Игорь добиться этого? Обоснуйте свой ответ.

   Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

   - restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
   - restore two accounts – then a new question from the user will appear;
   - answer one user question – then two new questions will appear;
   - restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

   Initially, there were problems with 12 user accounts, and 17 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. Can Igor manage to do that? Explain your answer.

4. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

   - восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
   - восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
   - ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
   - восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

   Изначально были проблемы с 15 аккаунтами пользователей, и 10 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. Сможет ли Игорь добиться этого? Обоснуйте свой ответ.

Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

- restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
- restore two accounts – then a new question from the user will appear;
- answer one user question – then two new questions will appear;
- restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

Initially, there were problems with 15 user accounts, and 10 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. Can Igor manage to do that? Explain your answer.

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Вот как может действовать Игорь, чтобы добиться желаемого:
1) 15 раз выполнить операцию №4: в результате не останется вопросов пользователей, но останутся 10 «сломанных» аккаунтов;
2) по 4 раза (поочередно) выполнить пару операций №2 и №4: в результате останутся только 2 «сломанных» аккаунта;
3) выполнить операцию №2: в результате не останется ни «сломанных» аккаунтов, ни вопросов пользователей.

Критерии оценивания:

- условие интерпретировано в терминах пар неотрицательных целых чисел – 1 балл;
- показаны первыедействия с использованием только операций 2 и 4 – 2 балла;
- приведена в целом верная последовательность действий, но одна из операциф использована некорректно (например, операция 4 при отсутствии «сломанных» аккаунтов) – 3 балла;
- решение не до конца обосновано, либо присутствует арифметическая ошибка на последнем этапе – 4 балла;
- решение полностью верное – 5 баллов.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Here's how Igor can act to achieve the goal:
1) perform operation 4 fifteen times: as a result, there will be no user questions left, but 10 unrestored accounts will remain;
2) perform a pair of operations 2 and 4 four times (alternately): as a result, only 2 unrestored accounts will remain;
3) perform operation 2: as a result, there will be no unrestored accounts and user questions left.

Criteria:

- the task's formulation is interpreted in terms of pairs of non-negative integers – 1 point;
- the first actions are shown using only operations 2 and 4 – 2 points;
- the generally correct sequence of actions is given, but one of the operations is used incorrectly (for example, operation 4 in the absence of unrestored accounts) – 3 points;

- the solution is not full, or there is an arithmetic error at its last stage – 4 points;
- the solution is full and correct – 5 points.

8-9th degree

Task 1.

1. Сеть автобусных маршрутов города Иннополиса устроена так:

   - общее количество автобусных остановок в городе – 9 штук, и любые две из них соединены дорогой;
   - на каждом маршруте должны быть ровно 3 остановки (включая начало и конец маршрута);
   - любые два автобусных маршрута имеют либо одну общую остановку, либо ни одной.

   Какое наибольшее количество автобусных маршрутов может иметь город Иннополис?

   The bus routes web in the town of Innopolis is built as follows:

   - the total number of bus stops in the town is 9 with any two of them connected with a road;
   - each route must have exactly 3 stops (including the beginning and end of the route);
   - any two bus routes have either one common stop or none.

   What is the largest number of bus routes the town of Innopolis can have?

   Answer: 12

2. Сеть автобусных маршрутов города Иннополиса устроена так:

   - общее количество автобусных остановок в городе – 9 штук, и любые две из них соединены дорогой;
   - на каждом маршруте должны быть ровно 4 остановки (включая начало и конец маршрута);
   - любые два автобусных маршрута имеют либо одну общую остановку, либо ни одной.

   Какое наибольшее количество автобусных маршрутов может иметь город Иннополис?

   The bus routes web in the town of Innopolis is built as follows:

   - the total number of bus stops in the town is 9 with any two of them connected with a road;
   - each route must have exactly 4 stops (including the beginning and end of the route);
   - any two bus routes have either one common stop or none.

   What is the largest number of bus routes the town of Innopolis can have?

   Answer: 3

3. Сеть автобусных маршрутов города Иннополиса устроена так:

   - общее количество автобусных остановок в городе – 10 штук, и любые две из них соединены дорогой;
   - на каждом маршруте должны быть ровно 3 остановки (включая начало и конец маршрута);
   - любые два автобусных маршрута имеют либо одну общую остановку, либо ни одной.

Какое наибольшее количество автобусных маршрутов может иметь город Иннополис?

The bus routes web in the town of Innopolis is built as follows:

- the total number of bus stops in the town is 10 with any two of them connected with a road;
- each route must have exactly 3 stops (including the beginning and end of the route);
- any two bus routes have either one common stop or none.

What is the largest number of bus routes the town of Innopolis can have?

Answer: 13

4. Сеть автобусных маршрутов города Иннополиса устроена так:

   - общее количество автобусных остановок в городе – 12 штук, и любые две из них соединены дорогой;
   - на каждом маршруте должны быть ровно 4 остановки (включая начало и конец маршрута);
   - любые два автобусных маршрута имеют либо одну общую остановку, либо ни одной.

   Какое наибольшее количество автобусных маршрутов может иметь город Иннополис?

   The bus routes web in the town of Innopolis is built as follows:

   - the total number of bus stops in the town is 12 with any two of them connected with a road;
   - each route must have exactly 4 stops (including the beginning and end of the route);
   - any two bus routes have either one common stop or none.

   What is the largest number of bus routes the town of Innopolis can have?

Answer: 9

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* «Зафиксируем» автобусную остановку X – одну из 9-и. Кроме нее, в городе есть еще 8 остановок, и на каждом автобусном маршруте, проходящем через X, есть еще 2 остановки, причем эти маршруты не могут иметь других общих остановок, кроме X – значит, таких маршрутов не более $8 : 2 = 4$.

Теперь занумеруем автобусные остановки числами от 1 до 9. Пусть в Иннополисе всего n автобусных маршрутов, из них n_1 проходят через остановку 1, n_2 – через остановку 2, и т.д. На каждом маршруте 3 остановки – значит, $n_1 + n_2 + \cdots + n_9 = 3n$, при этом $n_i \leq 4$ для любого i согласно доказанному выше. Следовательно, $3n \leq 4 \cdot 9$, откуда $n \leq 12$.

Покажем, как провести 12 маршрутов (цифры обозначают номера остановок, а трехзначные числа – автобусные маршруты): 123, 456, 789, 147, 258, 369, 249, 168, 267, 348, 159, 357.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Lets «fix» bus stop X – one of the 9. In addition to it, there are 8 more bus stops in the city, and on each bus route passing through X, there are 2 more stops, and these routes cannot have other stops in common except X – therefore, there are no more than $8 : 2 = 4$ such routes.

Now let's enumerate the bus stops with numbers from 1 to 9. Let there be only n bus routes in Innopolis, of which n_1 go through stop 1, n_2 go through stop 2, etc. There are 3 stops on each route – by that, $n_1 + n_2 + \cdots + n_9 = 3n$, while $n_i \leq 4$ for any i according to what was proven above. Therefore, $3n \leq 4 \cdot 9$, thus $n \leq 12$.

Finally, lets show how to establish the 12 routes (digits indicate bus stops, and three-digit numbers indicate bus routes): 123, 456, 789, 147, 258, 369, 249, 168, 267, 348, 159, 357.

Task 2.

1. Дано число $n = 2^5 \cdot 13^7$. Найдите количество натуральных делителей n^2, не являющихся делителями n.

   Given $n = 2^5 \cdot 13^7$. Find the number of positive integer divisors of n^2 that are not divisors of n.

   Answer: 117

2. Дано число $n = 5^9 \cdot 13^8$. Найдите количество натуральных делителей n^2, не являющихся делителями n.

   Given $n = 5^9 \cdot 13^8$. Find the number of positive integer divisors of n^2 that are not divisors of n.

   Answer: 233

3. Дано число $n = 7^6 \cdot 17^{11}$. Найдите количество натуральных делителей n^2, не являющихся делителями n.

   Given $n = 7^6 \cdot 17^{11}$. Find the number of positive integer divisors of n^2 that are not divisors of n.

   Answer: 215

4. Дано число $n = 3^7 \cdot 7^{10}$. Найдите количество натуральных делителей n^2, не являющихся делителями n.

   Given $n = 3^7 \cdot 7^{10}$. Find the number of positive integer divisors of n^2 that are not divisors of n.

   Answer: 227

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть дано число $N = a^x \cdot b^y$ для натуральных x, y и различных простых a, b. Докажем, что N имеет ровно $(x+1)(y+1)$ натуральных делителей.

Для начала заметим, что любой делитель d числа N имеет вид $d = a^u \cdot b^v$ для целых неотрицательных $u \le x$, $v \le y$. Действительно, других простых делителей d иметь не может, а степени вхождения в него простых a, b ограничены таковыми у N. Более того, каждая пара u, v взаимооднозначно определяет d – а значит, количество таких пар равно количеству делителей числа N. Т.н. «правило умножения» подсказывает, что количество таких пар равно $(x+1)(y+1)$, что и требовалось доказать.

Теперь заметим, что любой делитель n является делителем n^2 – значит, искомое количество равно разности количеств делителей n^2 и n, т.е. $(2 \cdot 5 + 1)(2 \cdot 7 + 1) - (5+1)(7+1) = 117$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Consider a number $N = a^x \cdot b^y$ for positive integers x, y and primes a, b $(a \ne b)$. Lets prove that N has exactly $(x+1)(y+1)$ positive integer divisors.

Note that any divisor d of a number N has the form $d = a^u \cdot b^v$ for non-negative integers $u \leq x$, $v \leq y$. Indeed, d cannot have any other prime divisors, and the degrees of occurrence of primes a, b in it are limited to those of N. Moreover, each pair u, v determines d one-to-one, which means the number of such pairs is equal to the number of divisors of the number N. The so-called «multiplication rule» states that the number of such pairs is equal to $(x+1)(y+1)$, which is what needed to be proven.

Note that any divisor n is a divisor of n^2 – by that, the required quantity is equal to the difference between the numbers of divisors of n^2 and such for n, i.e. $(2 \cdot 5 + 1)(2 \cdot 7 + 1) - (5+1)(7+1) = 117$.

Task 3.

1. На клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 1, нарисован треугольник так, что его стороны с длинами 5 и 12 лежат на сторонах клеток. Через сколько вершин клеток пройдет биссектриса наименьшего угла этого треугольника? Помните, что вершина угла, из которого проведена биссектриса, тоже является ее частью.

   On checkered paper with the side of the cell equal to 1, a triangle is drawn in such way that its legs with lengths 5 and 12 lie on the sides of the cells. How many cell vertices will the bisector of the smallest angle of this triangle intersect? Remember that the vertex of the angle which the bisector is drawn from is also part of it.

   Answer: 3

2. На клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 0.2, нарисован треугольник так, что его стороны с длинами 5 и 12 лежат на сторонах клеток. Через сколько вершин клеток пройдет биссектриса наименьшего угла этого треугольника? Помните, что вершина угла, из которого проведена биссектриса, тоже является ее частью.

   On checkered paper with the side of the cell equal to 0.2, a triangle is drawn in such way that its legs with lengths 5 and 12 lie on the sides of the cells. How many cell vertices will the bisector of the smallest angle of this triangle intersect? Remember that the vertex of the angle which the bisector is drawn from is also part of it.

   Answer: 13

3. На клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 1, нарисован треугольник так, что его стороны с длинами 20 и 21 лежат на сторонах клеток. Через сколько вершин клеток пройдет биссектриса наименьшего угла этого треугольника? Помните, что вершина угла, из которого проведена биссектриса, тоже является ее частью.

   On checkered paper with the side of the cell equal to 1, a triangle is drawn in such way that its legs with lengths 20 and 21 lie on the sides of the cells. How many cell vertices will the bisector of the smallest angle of this triangle intersect? Remember that the vertex of the angle which the bisector is drawn from is also part of it.

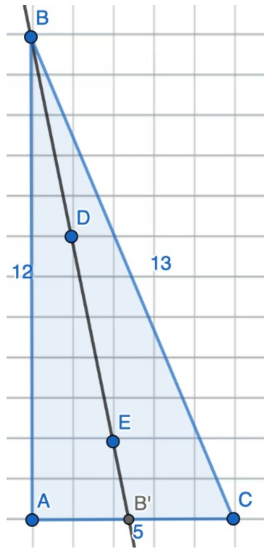
   Answer: 5

4. На клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 0.5, нарисован треугольник так, что его стороны с длинами 7 и 24 лежат на сторонах клеток. Через сколько вершин клеток пройдет биссектриса наименьшего угла этого треугольника? Помните, что вершина угла, из которого проведена биссектриса, тоже является ее частью.

On checkered paper with the side of the cell equal to 0.5, a triangle is drawn in such way that its legs with lengths 7 and 24 lie on the sides of the cells. How many cell vertices will the bisector of the smallest angle of this triangle intersect? Remember that the vertex of the angle which the bisector is drawn from is also part of it.

Answer: 7

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Наименьшим является угол напротив меньшего катета $AC = 5$ (см. рис.). Находим гипотенузу $BC = 13$ по катетам и, используя свойство биссектрисы угла треугольника о делении ею противоположной стороны, находим отношение отрезков, на которые она делит AC: $\frac{AB'}{B'C} = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{13}$.

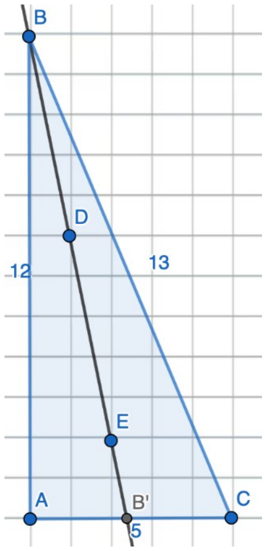


Зная AC и используя найденное отношение, найдем $AB' = AC \cdot \frac{AB}{AB+BC} = 2.4$. Найдем тангенс половины меньшего угла треугольника, прилежащего к катету:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{2.4}{12} = \frac{1}{5}$$

Получим, что каждую клетку «вниз» от точки B (см. рис.) биссектриса будет пересекать клетку в узле. Значит, количество узлов сетки, которые пересекает биссектриса, равно $\left[\frac{12}{5}\right] + 1 = 3$ (здесь $[t]$ обозначает целую часть t, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t).

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* The smallest angle is the angle opposite the smaller side $AC = 5$ (see picture). We find the hypotenuse $BC = 13$ by the cathetes, then we use the property of the angle bisector we find the ratio of the segments into which it divides the side $\frac{AB'}{B'C} = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{13}$.



Knowing AC and the ratio of the segments, we find $AB' = AC \cdot \frac{AB}{AB+BC} = 2.4$. Lets calculate the tangent of the half of the smaller angle of the triangle:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{2.4}{12} = \frac{1}{5}$$

We get that every cell «down» (see the triangle's orientation on the picture) from the point B the bisector will intersect a cell at a node. So, the number of nodes of the grid that the bisector intersects is equal to $\left[\frac{12}{5}\right] + 1 = 3$ (here $[t]$ denotes the integer part of t, i.e. the largest integer not exceeding t).

Task 4.

1. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

   - восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
   - восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
   - ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
   - восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

   Изначально были проблемы с 10 аккаунтами пользователей, и 15 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. За какое минимальное время (в минутах) Игорь сможет добиться этого?

   Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

   - restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
   - restore two accounts – then a new question from the user will appear;
   - answer one user question – then two new questions will appear;
   - restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

Initially, there were problems with 10 user accounts, and 15 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. In what minimum amount of time (in minutes) can Igor achieve this?

Answer: 24

2. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

   - восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
   - восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
   - ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
   - восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

   Изначально были проблемы с 14 аккаунтами пользователей, и 15 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. За какое минимальное время (в минутах) Игорь сможет добиться этого?

   Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

   - restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
   - restore two accounts – then a new question from the user will appear;
   - answer one user question – then two new questions will appear;
   - restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

   Initially, there were problems with 14 user accounts, and 15 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. In what minimum amount of time (in minutes) can Igor achieve this?

   Answer: 28

3. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

   - восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
   - восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
   - ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
   - восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

Изначально были проблемы с 12 аккаунтами пользователей, и 18 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. За какое минимальное время (в минутах) Игорь сможет добиться этого?

Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

- restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
- restore two accounts – then a new question from the user will appear;
- answer one user question – then two new questions will appear;
- restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

Initially, there were problems with 12 user accounts, and 18 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. In what minimum amount of time (in minutes) can Igor achieve this?

Answer: 29

4. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

   - восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
   - восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
   - ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
   - восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

   Изначально были проблемы с 15 аккаунтами пользователей, и 10 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. За какое минимальное время (в минутах) Игорь сможет добиться этого?

   Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

   - restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
   - restore two accounts – then a new question from the user will appear;
   - answer one user question – then two new questions will appear;
   - restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

   Initially, there were problems with 15 user accounts, and 10 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. In what minimum amount of time (in minutes) can Igor achieve this?

Answer: 23

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть есть m «сломанных» аккаунтов и n вопросов пользователей – сопоставим паре (m, n) точку с соответствующими координатами на плоскости. Тогда действиям Игоря (и описанным в условии последствиям этих действий) поставим в соответствие векторы:

- вектор $\overrightarrow{a} = (0, 0)$: «восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же)»;
- вектор $\overrightarrow{b} = (-2, 1)$: «восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя»;
- вектор $\overrightarrow{c} = (0, 1)$: «ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса»;
- вектор $\overrightarrow{d} = (0, -1)$: «восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же)».

Т.е. выполнить действие – значит переместиться вдоль соответствующего вектора, при этом не нарушая условия неотрицательности координат его концов (кол-ва аккаунтов и вопросов – целые неотрицательные числа). Цель – попасть в точку $(0, 0)$ – это будет означать, что не осталось проблем с аккаунтами и вопросами пользователей.

Сразу заметим, что действия, соответствующие векторам $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{c}$, не приводят к приближению к $(0, 0)$, кроме случаев, когда эти действия выполняются из точек $(1, 0)$ и $(0, 1)$, соответственно. Иными словами, из этих действий Игорю пригодится не более одного, причем если и пригодится, то только 1 раз – в самую последнюю минуту.

Чтобы переместиться в точку $(0, 0)$ действиями, соответствующими векторам $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{d}$, нужно находиться в точках $(2, 0)$ и $(1, 1)$, соответственно.

Итак, при помощи векторов $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{d}$ необходимо переместиться из точки $(10, 15)$ в точку $(2, 0)$, либо $(1, 1)$, либо $(1, 0)$, либо $(0, 1)$ за минимальное количество «шагов», после чего потребуется еще один шаг для перемещения в $(0, 0)$.

Рассмотрим случай перемещения в $(2, 0)$: пусть для этого потребовалось x векторов $\overrightarrow{b}$ и y векторов $\overrightarrow{d}$, т.е. $x \cdot \overrightarrow{b} + y \cdot \overrightarrow{d} = (-8, -15)$, или

$$\begin{cases} -2x + 0y = -8 \\ 1x - 1y = -15 \end{cases},$$

откуда $x = 4$, $y = 19$, т.е. всего Игорю потребуется $4 + 19 + 1 = 24$ действия. Аналогичным образом рассмотрев точки $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, получим, что найденные 24 действия – самый быстрый из возможных способов.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let there be m «broken» accounts and n user questions – match the (m, n) pair to a point with the corresponding coordinates on the plane. Then we will associate Igor's actions (and the consequences of these actions described in the task's formulation) with the following vectors:

- vector $\overrightarrow{a} = (0, 0)$: «restore one account, but then another account will break (possibly the restored one)»;

- vector $\overrightarrow{b} = (-2, 1)$: «restore two accounts – then a new question from the user will appear»;
- vector $\overrightarrow{c} = (0, 1)$: «answer one user question – then two new questions will appear»;
- vector $\overrightarrow{d} = (0, -1)$: «restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break».

To perform an action means to move along the corresponding vector, without violating the condition of non-negativity of the coordinates of its ends (the number of accounts and questions are non-negative integers). The goal is to get to the point $(0, 0)$ – by that, there will be no problems left with accounts and user questions.

Note that the actions corresponding to the vectors $\overrightarrow{a}$ and $\overrightarrow{c}$ do not lead to $(0, 0)$, except when these actions are performed from points $(1, 0)$ and $(0, 1)$, respectively. In other words, Igor will need no more than one of these actions, and if he does, it will be only once – at the very last minute.
To move to the point $(0, 0)$ by actions corresponding to vectors $\overrightarrow{b}$ and $\overrightarrow{d}$, you need to be at points $(2, 0)$ and $(1, 1)$, respectively.

So, it is necessary to use the vectors $\overrightarrow{b}$ and $\overrightarrow{d}$ to move from point $(10, 15)$ to point $(2, 0)$, or $(1, 1)$, or $(1, 0)$ or $(0, 1)$ in a minimum number of «steps», after which it would take another step to move to $(0, 0)$.

Consider the case of moving to $(2, 0)$: let this require x vectors $\overrightarrow{b}$ and y vectors $\overrightarrow{d}$, i.e. $x \cdot \overrightarrow{b} + y \cdot \overrightarrow{d} = (-8, -15)$, or

$$\begin{cases} -2x + 0y = -8 \\ 1x - 1y = -15 \end{cases},$$

thus $x = 4$, $y = 19$, i.e. Igor will need $4 + 19 + 1 = 24$ actions in total. Having similarly considered the points $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, we find that the 24 actions just found are the fastest possible way to achieve the goal.

Task 5.

1. Анна утверждает, что можно записать число, кратное 2023^{2024}, не используя цифры «0» и последовательностей цифр «13» и «666», а суеверный Тимур говорит, что это невозможно. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ с помощью математики, а не суеверий.

   Anna claims that it is possible to write a number that is a multiple of 2023^{2024} without using the digit «0» and the sequences of digits «13» and «666», but superstitious Timur says that it's impossible. Who is right? Explain your answer using mathematics, not superstition.

2. Анна утверждает, что можно записать число, кратное 2023^{2023}, не используя цифры «0» и последовательностей цифр «13» и «666», а суеверный Тимур говорит, что это невозможно. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ с помощью математики, а не суеверий.

   Anna claims that it is possible to write a number that is a multiple of 2023^{2023} without using the digit «0» and the sequences of digits «13» and «666», but superstitious Timur says that it's impossible. Who is right? Explain your answer using mathematics, not superstition.

3. Анна утверждает, что можно записать число, кратное $2023^{2023^{2023}}$, не используя цифры «0» и последовательностей цифр «13» и «666», а суеверный Тимур говорит, что это невозможно. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ с помощью математики, а не суеверий.

Anna claims that it is possible to write a number that is a multiple of $2023^{2023^{2023}}$ without using the digit «0» and the sequences of digits «13» and «666», but superstitious Timur says that it's impossible. Who is right? Explain your answer using mathematics, not superstition.

4. Анна утверждает, что можно записать число, кратное $2023^{2024^{2023}}$, не используя цифры «0» и последовательностей цифр «13» и «666», а суеверный Тимур говорит, что это невозможно. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ с помощью математики, а не суеверий.

   Anna claims that it is possible to write a number that is a multiple of $2023^{2024^{2023}}$ without using the digit «0» and the sequences of digits «13» and «666», but superstitious Timur says that it's impossible. Who is right? Explain your answer using mathematics, not superstition.

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Докажем, что требуемое число можно записать при помощи только цифры «1» – а значит, Анна права.

Итак, пусть a_n – натуральное число, десятичная запись которого состоит из n «единиц», т.е. $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$, $\ldots$. Пусть r_n – остатки от деления a_n на 2023^{2024} при всевозможных натуральных n. Если среди $r_1, r_2, \ldots, r_{2023^{2024}}$ есть $r_k = 0$, то соответствующее a_k кратно 2023^{2024}, что доказывает правоту Анны.

Если же среди $r_1, r_2, \ldots, r_{2023^{2024}}$ нет «0», то, согласно принципу Дирихле, найдутся $r_i = r_j$ ($i \neq j$. Не ограничивая общности, будем считать $i < j$). Тогда $a_j - a_i = a_{j-i} \cdot 10^i$ кратно 2023^{2024}, при этом 10 взаимно просто с 2023 – а значит, a_{j-i} кратно 2023^{2024}, что доказывает правоту Анны.

Критерии оценивания:

- присутствует идея использовать в записи числа только одну цифру – 1 балл;
- при рассмотрении остатков использован принцип Дирихле – 2 балла;
- при рассмотрении остатков использован принцип Дирихле, доказано, что остаток при делении a_n на нужное число может быть равен 0 – 3 балла;
- верный ответ при незначительных ошибках в решении – 4 балла;
- полностью верные решение и ответ – 5 баллов.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let's prove that the required number can be written using only the digit «1», which means Anna is right.

First, let a_n be a positive integer which decimal notation consists of n digits «1», i.e. $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$, $\ldots$. Let r_n be the remainders from dividing a_n by 2023^{2024} for all possible integers n. If among $r_1, r_2, \ldots, r_{2023^{2024}}$ there is $r_k = 0$, then the corresponding a_k is a multiple of 2023^{2024}, which proves Anna is right.

If among $r_1, r_2, \ldots, r_{2023^{2024}}$ there is no «0», then, according to the Dirichlet's principle, there exist $r_i = r_j$ ($i \neq j$; without loss of generality, we assume $i < j$). Then $a_j - a_i = a_{j-i} \cdot 10^i$ is a multiple of 2023^{2024}, while 10 is coprime with 2023 – thus, a_{j-i} is a multiple of 2023^{2024}, which proves Anna is right.

Criteria:

- there is an idea to use only one digit to write the required number – 1 point;
- when considering remainders, the Dirichlet principle was used – 2 points;
- when considering remainders, the Dirichlet principle was used, also it was proven that the remainder when dividing a_n by the required number can be equal to 0 – 3 points;

- correct answer with minor errors in the solution – 4 points;
- completely correct solution and answer – 5 points.

Task 6.

1. Из бо́льшего правильного 8-угольника вырезали меньший правильный 6-угольник. Обязательно ли можно провести прямую так, чтобы она разделила оставшуюся фигуру на две равновеликие (т.е. равные по площади) фигуры?

   From the larger regular 8-gon a smaller regular 6-gon was cut out. Is it always possible to draw a straight line that divides the remaining figure into two figures with equal areas?

2. Из бо́льшего правильного 6-угольника вырезали меньший правильный 10-угольник. Обязательно ли можно провести прямую так, чтобы она разделила оставшуюся фигуру на две равновеликие (т.е. равные по площади) фигуры?

   From the larger regular 6-gon a smaller regular 10-gon was cut out. Is it always possible to draw a straight line that divides the remaining figure into two figures with equal areas?

3. Из бо́льшего правильного 8-угольника вырезали меньший правильный 10-угольник. Обязательно ли можно провести прямую так, чтобы она разделила оставшуюся фигуру на две равновеликие (т.е. равные по площади) фигуры?

   From the larger regular 8-gon a smaller regular 10-gon was cut out. Is it always possible to draw a straight line that divides the remaining figure into two figures with equal areas?

4. Из бо́льшего правильного 10-угольника вырезали меньший правильный 6-угольник. Обязательно ли можно провести прямую так, чтобы она разделила оставшуюся фигуру на две равновеликие (т.е. равные по площади) фигуры?

   From the larger regular 10-gon a smaller regular 6-gon was cut out. Is it always possible to draw a straight line that divides the remaining figure into two figures with equal areas?

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Здесь и далее будем называть центром правильного $2n$-угольника центр описанной около него окружности – он располагается на пересечении наибольших диагоналей $2n$-угольника. Заметим, что произвольная прямая l, проходящая через центр правильного $2n$-угольника, делит его на два равных (а значит, и равновеликих) многоугольника: они совмещаются поворотом вокруг центра исходного $2n$-угольника на $180°$.

Пусть A – центр исходного (бо́льшего) 8-угольника, а B – центр меньшего 6-угольника. Тогда прямая AB делит каждый из них на два равновеликих многоугольника, т.е. по каждую сторону AB лежит половина площади каждого из двух упомянутых многоугольников – а значит, эта прямая удовлетворяет условиям задачи.

Критерии оценивания:

- доказано, что если центры многоугольников совпадают, то любая прямая, проходящая через эти центры, делит фигуру на равновеликие – 1 балл;

- показано, что прямая, проходящая через центр правильного $2n$-угольника, делит его на два равных/равновеликих – 3 балла;

- доказано, что требуемая прямая соединяет центры многоугольников – 5 баллов.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Here and later we will call the center of a regular $2n$-gon the center of its circumcircle – it is located at the intersection of the largest diagonals of the $2n$-gon. Note that an arbitrary line l passing through the center of a regular $2n$-gon divides it into two equal (and therefore having equal areas) polygons: they coincide after rotating around the center of the original $2n$-gon by $180°$.

Let A be the center of the original (larger) octagon, and B the center of the smaller 6-gon. Then the line AB divides each of them into two equal polygons, i.e. by each side from AB lies half the area of each of the two polygons, which means that the line satisfies the task's conditions.

Criteria:

- it has been proven that if the centers of the polygons coincide, then any line passing through these centers divides the figure into two with equal areas – 1 point;

- it is shown that a line passing through the center of a regular $2n$-gon divides it into two equal/equal-sized – 3 points;

- it is proved that the required line connects the centers of the polygons – 5 points.

10-12th degree

Task 1.

1. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

   - восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
   - восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
   - ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
   - восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

   Изначально были проблемы с 10 аккаунтами пользователей, и 15 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. За какое минимальное время (в минутах) Игорь сможет добиться этого?

   Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

   - restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
   - restore two accounts – then a new question from the user will appear;
   - answer one user question – then two new questions will appear;
   - restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

   Initially, there were problems with 10 user accounts, and 15 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. In what minimum amount of time (in minutes) can Igor achieve this?

   Answer: 24

2. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

   - восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
   - восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
   - ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
   - восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

   Изначально были проблемы с 14 аккаунтами пользователей, и 15 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. За какое минимальное время (в минутах) Игорь сможет добиться этого?

Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

- restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
- restore two accounts – then a new question from the user will appear;
- answer one user question – then two new questions will appear;
- restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

Initially, there were problems with 14 user accounts, and 15 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. In what minimum amount of time (in minutes) can Igor achieve this?

Answer: 28

3. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

- восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
- восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
- ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
- восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

Изначально были проблемы с 12 аккаунтами пользователей, и 18 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. За какое минимальное время (в минутах) Игорь сможет добиться этого?

Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

- restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
- restore two accounts – then a new question from the user will appear;
- answer one user question – then two new questions will appear;
- restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

Initially, there were problems with 12 user accounts, and 18 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. In what minimum amount of time (in minutes) can Igor achieve this?

Answer: 29

4. Игорь, администратор технической поддержки ВКонтакте, помогает восстанавливать аккаунты пользователей и попутно отвечает на их вопросы. За одну минуту Игорь может сделать одно из следующих действий:

   - восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же);
   - восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя;
   - ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса;
   - восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же).

   Изначально были проблемы с 15 аккаунтами пользователей, и 10 пользователей написали в техподдержку свои вопросы. Если Игорю удастся в какой-то момент свести к нулю и проблемы с аккаунтами, и количество вопросов пользователей, то новых проблем и вопросов сегодня уже не будет. За какое минимальное время (в минутах) Игорь сможет добиться этого?

   Igor, who is VKontakte technical support administrator, helps restore user accounts and answers their questions along the way. In one minute, Igor can do one of the following actions:

   - restore one account, but then another account will break (possibly the restored one);
   - restore two accounts – then a new question from the user will appear;
   - answer one user question – then two new questions will appear;
   - restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break.

   Initially, there were problems with 15 user accounts, and 10 users wrote to technical support with their questions. If at some point Igor manages to reduce problems with accounts and the number of user questions to zero, then there will be no new problems and questions today. In what minimum amount of time (in minutes) can Igor achieve this?

Answer: 23

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть есть m «сломанных» аккаунтов и n вопросов пользователей – сопоставим паре (m, n) точку с соответствующими координатами на плоскости. Тогда действиям Игоря (и описанным в условии последствиям этих действий) поставим в соответствие векторы:

- вектор $\overrightarrow{a} = (0, 0)$: «восстановить один аккаунт, но тогда еще один аккаунт сломается (возможно, тот же)»;
- вектор $\overrightarrow{b} = (-2, 1)$: «восстановить два аккаунта – тогда появится новый вопрос от пользователя»;
- вектор $\overrightarrow{c} = (0, 1)$: «ответить на один вопрос пользователя – тогда появятся два новых вопроса»;
- вектор $\overrightarrow{d} = (0, -1)$: «восстановить один аккаунт и ответить на один вопрос – тогда сломается один аккаунт (возможно, тот же)».

Т.е. выполнить действие – значит переместиться вдоль соответствующего вектора, при этом не нарушая условия неотрицательности координат его концов (кол-ва аккаунтов и вопросов – целые неотрицательные числа). Цель – попасть в точку $(0, 0)$ – это будет означать, что не осталось проблем с аккаунтами и вопросами пользователей.

Сразу заметим, что действия, соответствующие векторам $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{c}$, не приводят к приближению к $(0,0)$, кроме случаев, когда эти действия выполняются из точек $(1,0)$ и $(0,1)$, соответственно. Иными словами, из этих действий Игорю пригодится не более одного, причем если и пригодится, то только 1 раз – в самую последнюю минуту.
Чтобы переместиться в точку $(0,0)$ действиями, соответствующими векторам $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{d}$, нужно находиться в точках $(2,0)$ и $(1,1)$, соответственно.

Итак, при помощи векторов $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{d}$ необходимо переместиться из точки $(10,15)$ в точку $(2,0)$, либо $(1,1)$, либо $(1,0)$, либо $(0,1)$ за минимальное количество «шагов», после чего потребуется еще один шаг для перемещения в $(0,0)$.

Рассмотрим случай перемещения в $(2,0)$: пусть для этого потребовалось x векторов $\overrightarrow{b}$ и y векторов $\overrightarrow{d}$, т.е. $x \cdot \overrightarrow{b} + y \cdot \overrightarrow{d} = (-8,-15)$, или

$$\begin{cases} -2x + 0y = -8 \\ 1x - 1y = -15 \end{cases},$$

откуда $x = 4$, $y = 19$, т.е. всего Игорю потребуется $4+19+1 = 24$ действия. Аналогичным образом рассмотрев точки $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$, получим, что найденные 24 действия – самый быстрый из возможных способов.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let there be m «broken» accounts and n user questions – match the (m,n) pair to a point with the corresponding coordinates on the plane. Then we will associate Igor's actions (and the consequences of these actions described in the task's formulation) with the following vectors:

- vector $\overrightarrow{a} = (0,0)$: «restore one account, but then another account will break (possibly the restored one)»;
- vector $\overrightarrow{b} = (-2,1)$: «restore two accounts – then a new question from the user will appear»;
- vector $\overrightarrow{c} = (0,1)$: «answer one user question – then two new questions will appear»;
- vector $\overrightarrow{d} = (0,-1)$: «restore one account and answer one question – then one account (possibly the restored one) will break».

To perform an action means to move along the corresponding vector, without violating the condition of non-negativity of the coordinates of its ends (the number of accounts and questions are non-negative integers). The goal is to get to the point $(0,0)$ – by that, there will be no problems left with accounts and user questions.

Note that the actions corresponding to the vectors $\overrightarrow{a}$ and $\overrightarrow{c}$ do not lead to $(0,0)$, except when these actions are performed from points $(1,0)$ and $(0,1)$, respectively. In other words, Igor will need no more than one of these actions, and if he does, it will be only once – at the very last minute.
To move to the point $(0,0)$ by actions corresponding to vectors $\overrightarrow{b}$ and $\overrightarrow{d}$, you need to be at points $(2,0)$ and $(1,1)$, respectively.

So, it is necessary to use the vectors $\overrightarrow{b}$ and $\overrightarrow{d}$ to move from point $(10,15)$ to point $(2,0)$, or $(1,1)$, or $(1,0)$ or $(0,1)$ in a minimum number of «steps», after which it would take another step to move to $(0,0)$.

Consider the case of moving to $(2,0)$: let this require x vectors $\overrightarrow{b}$ and y vectors $\overrightarrow{d}$, i.e. $x \cdot \overrightarrow{b} + y \cdot \overrightarrow{d} = (-8,-15)$, or

$$\begin{cases} -2x + 0y = -8 \\ 1x - 1y = -15 \end{cases},$$

thus $x = 4$, $y = 19$, i.e. Igor will need $4 + 19 + 1 = 24$ actions in total. Having similarly considered the points $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$, we find that the 24 actions just found are the fastest possible way to achieve the goal.

Task 2.

1. В остроугольном $\triangle ABC$ высота, опущенная на сторону BC, равна 10. На меньших дугах AB, AC окружности, описанной около $\triangle ABC$, отмечены точки P, Q (соответственно) так, что расстояния от точки A до прямых BP, CQ соответственно равны 4 и 6. Найдите расстояние от точки A до прямой PQ. Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых.

   In an acute-angled $\triangle ABC$ the height to its side BC is equal to 10. On the lesser arcs AB, AC of the $\triangle ABC$ circumcircle, points P, Q are marked respectively such that the distances from point A to lines BP, CQ are equal to 4 and 6, respectively. Calculate the distance from point A to line PQ. Write your answer as an integer or a decimal rounded to the nearest hundredth.

   Answer: 2.4

2. В остроугольном $\triangle ABC$ высота, опущенная на сторону BC, равна 10. На меньших дугах AB, AC окружности, описанной около $\triangle ABC$, отмечены точки P, Q (соответственно) так, что расстояния от точки A до прямых BP, CQ соответственно равны 7 и 5. Найдите расстояние от точки A до прямой PQ. Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых.

   In an acute-angled $\triangle ABC$ the height to its side BC is equal to 10. On the lesser arcs AB, AC of the $\triangle ABC$ circumcircle, points P, Q are marked respectively such that the distances from point A to lines BP, CQ are equal to 7 and 5, respectively. Calculate the distance from point A to line PQ. Write your answer as an integer or a decimal rounded to the nearest hundredth.

   Answer: 3.5

3. В остроугольном $\triangle ABC$ высота, опущенная на сторону BC, равна 8. На меньших дугах AB, AC окружности, описанной около $\triangle ABC$, отмечены точки P, Q (соответственно) так, что расстояния от точки A до прямых BP, CQ соответственно равны 4 и 6. Найдите расстояние от точки A до прямой PQ. Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых.

   In an acute-angled $\triangle ABC$ the height to its side BC is equal to 8. On the lesser arcs AB, AC of the $\triangle ABC$ circumcircle, points P, Q are marked respectively such that the distances from point A to lines BP, CQ are equal to 4 and 6, respectively. Calculate the distance from point A to line PQ. Write your answer as an integer or a decimal rounded to the nearest hundredth.

   Answer: 3

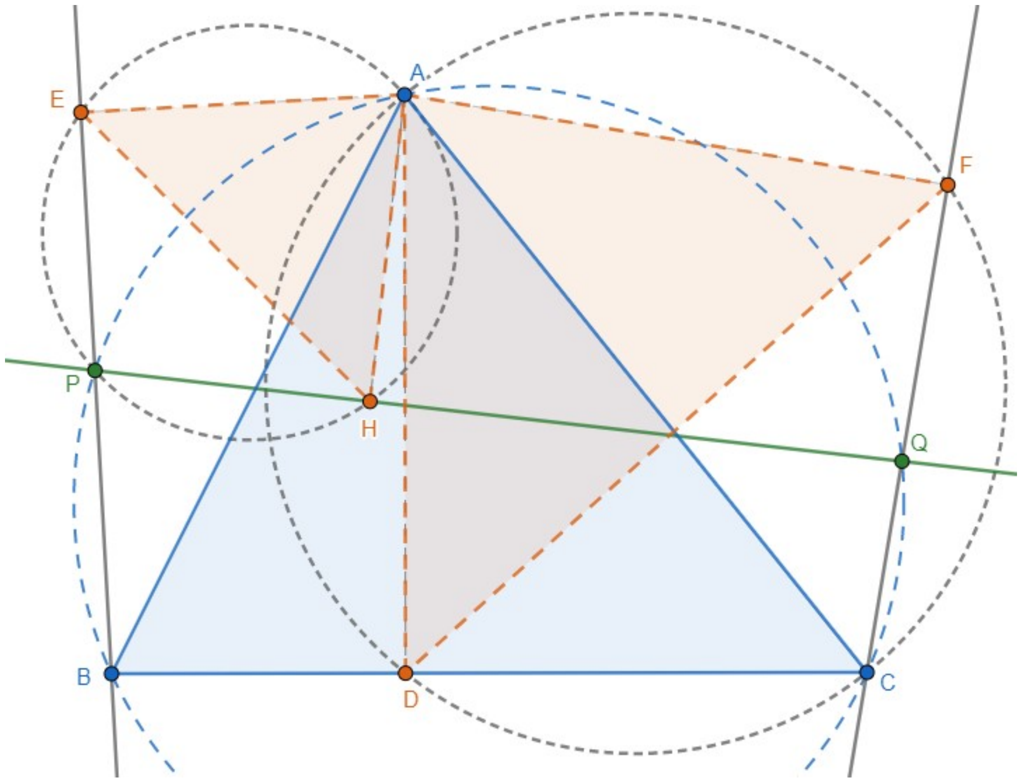
4. В остроугольном $\triangle ABC$ высота, опущенная на сторону BC, равна 6. На меньших дугах AB, AC окружности, описанной около $\triangle ABC$, отмечены точки P, Q (соответственно) так, что расстояния от точки A до прямых BP, CQ соответственно равны 5 и 3. Найдите расстояние от точки A до прямой PQ. Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых.

   In an acute-angled $\triangle ABC$ the height to its side BC is equal to 6. On the lesser arcs AB, AC of the $\triangle ABC$ circumcircle, points P, Q are marked respectively such that the distances from point

A to lines BP, CQ are equal to 5 and 3, respectively. Calculate the distance from point A to line PQ. Write your answer as an integer or a decimal rounded to the nearest hundredth.

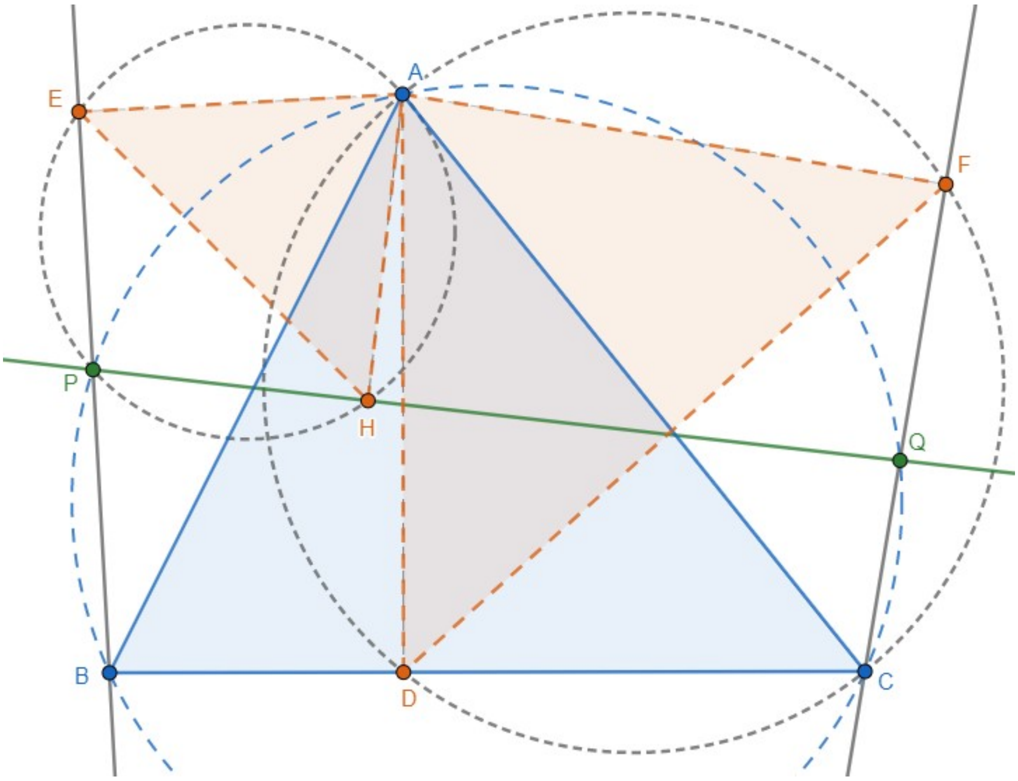
Answer: 2.5

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть D, E, F, H – основания перпендикуляров, проведенных из точки A к прямым BC, BP, CQ, PQ соответственно.
Тогда точки A, H, P, E лежат на одной окружности с диаметром AP, т.к. $\angle AEP = \angle AHP = 90°$; аналогично показываем, что точки A, D, C, F лежат на одной окружности с диаметром AC. Тогда $\angle AEH = \angle APH = \angle ACQ = \angle ADF$; также $\angle EAH = 180° - \angle EPH = \angle BPQ = 180° - \angle DCQ = \angle DAF$.



Следовательно, треугольники AEH и ADF подобны по двум углам, откуда $\frac{AH}{AF} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AH = \frac{AF \cdot AE}{AD} = 2.4$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let D, E, F, H be the bases of the perpendiculars drawn from the point A to the lines BC, BP, CQ, PQ, respectively.
Then the points A, H, P, E lie on the same circle with diameter AP, because $\angle AEP = \angle AHP = 90°$; similarly, the points A, D, C, F lie on the same circle with diameter AC. Then $\angle AEH = \angle APH = \angle ACQ = \angle ADF$; also $\angle EAH = 180° - \angle EPH = \angle BPQ = 180° - \angle DCQ = \angle DAF$.



Therefore, triangles AEH and ADF are similar, whence $\frac{AH}{AF} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AH = \frac{AF \cdot AE}{AD} = 2.4$.

Task 3.

1. Найдите минимальное натуральное k, при котором $k!$ нацело делится на 2^{2024}. По определению $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$.

   Find the smallest positive integer k such that $k!$ is divisible by 2^{2024}. By definition $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$.

   Answer: 2032

2. Найдите минимальное натуральное k, при котором $k!$ нацело делится на 2^{2026}. По определению $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$.

   Find the smallest positive integer k such that $k!$ is divisible by 2^{2026}. By definition $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$.

   Answer: 2034

3. Найдите минимальное натуральное k, при котором $k!$ нацело делится на 2^{2032}. По определению $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$.

   Find the smallest positive integer k such that $k!$ is divisible by 2^{2032}. By definition $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$.

   Answer: 2040

4. Найдите минимальное натуральное k, при котором $k!$ нацело делится на 2^{2021}. По определению $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$.

   Find the smallest positive integer k such that $k!$ is divisible by 2^{2021}. By definition $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k$.

Answer: 2028

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Сначала докажем, что для любого натурального n число $(2^n)!$ кратно $2^{(2^n-1)}$, но не кратно 2^{2^n}.
В произведении $(2^n)! = 1 \cdot 2 \cdots (2^n - 1) \cdot (2^n)$ есть ровно $2^n/2 = 2^{n-1}$ четных сомножителей (добавляют 1 к степени двойки в разложение $(2^n)!$ на простые множители), $2^n/4 = 2^{n-2}$ сомножителей, кратных 4 (добавляют еще по 1 к степени двойки в разложение $(2^n)!$ на простые множители), 2^{n-3} сомножителей, кратных 8, $\ldots$, $2^{n-n} = 1$ сомножитель, кратный 2^n (еще $+1$ к степени двойки) – итак, число 2 входит в разложение $(2^n)!$ на простые множители в степени $2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^1 + 2^0 = 2^n - 1$, что доказывает требуемое.

В нашей задаче нужно подобрать такое n, что $(2^n - 1)$ ближе всего к 2024. Это 11 и $k = 2^{11} = 2048$; тогда $(2^{11} - 1) = 2047$. Нам нужно найти минимальное k такое, чтобы $k!$ было кратно 2^{2024}. Будем уменьшать k и смотреть, как уменьшается степень двойки в разложении $k!$. Например, $2047!$ имеет на 11 двоек в разложении меньше, чем $2048!$ – нет множителя $2048 = 2^{11}$; $2033!$ имеет на 22 двойки меньше (нет множителей с 2034 по 2048, их произведение кратно 2^{22}) – значит, $2033!$ делится на 2^{2025}. А вот выбросить следующий чётный множитель, 2032, мы не можем – 2032 делится на 8, и $2031!$ будет кратно лишь 2^{2023}. Поэтому минимальное k, при котором $k!$ нацело делится на 2^{2024}, равно 2032.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Lets prove that for any positive integer n the number $(2^n)!$ is a multiple of $2^{(2^n-1)}$, but not a multiple of 2^{2^n}.
The product $(2^n)! = 1 \cdot 2 \cdots (2^n - 1) \cdot (2^n)$ has exactly $2^n/2 = 2^{n-1}$ even factors (adding 1 to the power of 2 in the representation of $(2^n)!$ as a product of primes), $2^n/4 = 2^{n-2}$ factors that are multiples of 4 (add another 1 to the power of 2 in the representation of $(2^n)!$ as a product of primes), 2^{n-3} factors are multiples of 8, $\ldots$, $2^{n-n} = 1$ factor is a multiple of 2^n ($+1$ more to the power of 2) – so, the number 2 is included in the representation of $(2^n)!$ into prime factors in the power of $2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^1 + 2^0 = 2^n - 1$, which proves what is required.

In the task presented, we need to find a number n such that $(2^n - 1)$ is closest to 2024. This is 11 with $k = 2^{11} = 2048$; then $(2^{11} - 1) = 2047$. We need to find a minimum k such that $k!$ is a multiple of 2^{2024}. We will reduce k and see how the number of powers of two in the expansion of $k!$ decreases. For example, $2047!$ has 11 fewer twos in the expansion than $2048!$ – there is no multiplier 2048; $2033!$ has 22 fewer 2s (there are no multipliers 2034 through 2048, their product is a multiple of 2^{22}). So, $2033!$ is divisible by 2^{2025}. But we can't throw away the next even multiplier 2032 since is divisible by 8, and $2031!$ will only be a multiple of 2^{2023}. Therefore, the smallest k such that $k!$ is divisible by 2^{2024} is 2032.

Task 4.

1. Тройка натуральных чисел (x, y, z) удовлетворяет уравнению

$$x^2 + 2023y^2 = z^2$$

   Также известно, что $y > 113$ – простое число, а z – наименьшее при данном y. Чему равно наибольшее возможное значение $\frac{z}{x}$? Запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых.

Triple of positive integers (x, y, z) satisfies the equation

$$x^2 + 2023y^2 = z^2$$

It is also known that $y > 113$ is a prime number, and z is the smallest number for a given y. What is the largest possible value of $\frac{z}{x}$? Write your answer as an integer or a decimal rounded to the nearest hundredth.

Answer: 1.33

2. Тройка натуральных чисел (x, y, z) удовлетворяет уравнению

$$x^2 + 845y^2 = z^2$$

Также известно, что $y > 61$ – простое число, а z – наименьшее при данном y. Чему равно наибольшее возможное значение $\frac{z}{x}$? Запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых.

Triple of positive integers (x, y, z) satisfies the equation

$$x^2 + 845y^2 = z^2$$

It is also known that $y > 61$ is a prime number, and z is the smallest number for a given y. What is the largest possible value of $\frac{z}{x}$? Write your answer as an integer or a decimal rounded to the nearest hundredth.

Answer: 1.5

3. Тройка натуральных чисел (x, y, z) удовлетворяет уравнению

$$x^2 + 3179y^2 = z^2$$

Также известно, что $y > 181$ – простое число, а z – наименьшее при данном y. Чему равно наибольшее возможное значение $\frac{z}{x}$? Запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых.

Triple of positive integers (x, y, z) satisfies the equation

$$x^2 + 3179y^2 = z^2$$

It is also known that $y > 181$ is a prime number, and z is the smallest number for a given y. What is the largest possible value of $\frac{z}{x}$? Write your answer as an integer or a decimal rounded to the nearest hundredth.

Answer: 1.2

4. Тройка натуральных чисел (x, y, z) удовлетворяет уравнению

$$x^2 + 1859y^2 = z^2$$

Также известно, что $y > 139$ – простое число, а z – наименьшее при данном y. Чему равно наибольшее возможное значение $\frac{z}{x}$? Запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, округленной до сотых.

Triple of positive integers (x, y, z) satisfies the equation

$$x^2 + 1859y^2 = z^2$$

It is also known that $y > 139$ is a prime number, and z is the smallest number for a given y. What is the largest possible value of $\frac{z}{x}$? Write your answer as an integer or a decimal rounded to the nearest hundredth.

Answer: 1.2

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Так как $z^2 > x^2$, пусть $z = x + k$, где k – натуральное число:

$$x^2 + 2023y^2 = (x + k)^2$$

$$x^2 + 2023y^2 = x^2 + 2kx + k^2$$

$$2kx = 2023y^2 - k^2$$

$$x = \frac{2023y^2 - k^2}{2k}, \tag{1}$$

откуда

$$z = \frac{2023y^2 + k^2}{2k} \tag{2}$$

Из равенства (1) и того, что x – натуральное, делаем следующие выводы:

$$k < 45y \tag{3}$$

$$\left(2023y^2 - k^2\right) \vdots\ 2 \tag{4}$$

$$\left(2023y^2 - k^2\right) \vdots\ k \tag{5}$$

Если выбранное значение k удовлетворяет (3)-(5), то оно дает нам решение исходного уравнения.

Теперь покажем, что при увеличении значения k значение z уменьшается для любого y. Подставим в выражение (2) значения k и $k + 1$ и получим следующее неравенство:

$$\frac{2023y^2 + (k+1)^2}{2(k+1)} \ \vee\ \frac{2023y^2 + k^2}{2k}$$

(здесь вместо $\vee$ должен стоять знак неравенства), которое сводится к:

$$k \ \vee\ 4046y^2 - 1$$

Соединяя с неравенством (3), получаем:

$$0 \ \vee\ 4046y^2 - 45y - 1$$

Для любого натурального y вместо $\vee$ здесь должен стоять знак $<$, что и требовалось доказать. Таким образом, вопрос задачи сводится к нахождению наибольшего значения k, удовлетворяющего критериям (3)-(5).

$2023 = 7 \cdot 17^2$. Значения $k = 7 \cdot 17y, 17^2y,\ 7 \cdot 17^2y,\ 17y^2,\ 7 \cdot 17y^2, 17^2y^2,\ 7 \cdot 17^2y^2$ не подходят под критерий (3). Также под него не подходит $k = y^2$, т.к. $y^2 > 45y$ $(y > 113 > 45)$. Под перечисленные критерии подходят только $1, 7, 17, 7 \cdot 17 = 119, 17^2 = 289, y, 7y, 17y$. Если сравнить их между собой, то получится, что $17y > 2023$ (т.к. $y > 119$). Значит, $k = 17y$ является наибольшим из подходящих, и

$$\max \frac{z}{x} = \frac{2023y^2 + 289y^2}{2023y^2 - 289y^2} = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Since $z^2 > x^2$, let $z = x + k$ for some is a positive integer k:

$$x^2 + 2023y^2 = (x+k)^2$$

$$x^2 + 2023y^2 = x^2 + 2kx + k^2$$

$$2kx = 2023y^2 - k^2$$

$$x = \frac{2023y^2 - k^2}{2k}, \tag{1}$$

thus

$$z = \frac{2023y^2 + k^2}{2k} \tag{2}$$

From (1) and the fact $x \in \mathbb{N}$ we get

$$k < 45y \tag{3}$$

$$\left(2023y^2 - k^2\right) \,\vdots\, 2 \tag{4}$$

$$\left(2023y^2 - k^2\right) \,\vdots\, k \tag{5}$$

If some k satisfies (3)-(5), then it gives us a solution to the initial equation.

Lets show that as the value of k increases, the value of z decreases for any y. We substitute the values k and $k+1$ into expression (2) and obtain the following inequality:

$$\frac{2023y^2 + (k+1)^2}{2(k+1)} \vee \frac{2023y^2 + k^2}{2k}$$

(there should be an inequality sign instead of $\vee$), which simplifies to:

$$k \ \vee \ 4046y^2 - 1$$

Combining with inequality (3), we get:

$$0 \ \vee \ 4046y^2 - 45y - 1$$

For any positive integer y, instead of $\vee$ there must be a sign $<$, which is what we needed to prove. Thus, the task is reduced to finding the largest value of k that satisfies criteria (3)-(5).

$2023 = 7 \cdot 17^2$. The values $k = 7 \cdot 17y, 17^2y,\ 7 \cdot 17^2y,\ 17y^2,\ 7 \cdot 17y^2, 17^2y^2,\ 7 \cdot 17^2y^2$ do not meet the criteria (3). Also, $k = y^2$ does not fit it since $y^2 > 45y$ ($y > 113 > 45$). Only $1, 7, 17, 7 \cdot 17 = 119, 17^2 = 289, y, 7y, 17y$ fit the criteria. If we compare them with each other, it turns out that $17y > 2023$ (since $y > 119$). By that, $k = 17y$ is the largest suitable one, and

$$\max \frac{z}{x} = \frac{2023y^2 + 289y^2}{2023y^2 - 289y^2} = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

Task 5.

1. Анна утверждает, что можно записать число, кратное 2023^{2024}, не используя цифры «0» и последовательностей цифр «13» и «666», а суеверный Тимур говорит, что это невозможно. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ с помощью математики, а не суеверий.

   Anna claims that it is possible to write a number that is a multiple of 2023^{2024} without using the digit «0» and the sequences of digits «13» and «666», but superstitious Timur says that it's impossible. Who is right? Explain your answer using mathematics, not superstition.

2. Анна утверждает, что можно записать число, кратное 2023^{2023}, не используя цифры «0» и последовательностей цифр «13» и «666», а суеверный Тимур говорит, что это невозможно. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ с помощью математики, а не суеверий.

   Anna claims that it is possible to write a number that is a multiple of 2023^{2023} without using the digit «0» and the sequences of digits «13» and «666», but superstitious Timur says that it's impossible. Who is right? Explain your answer using mathematics, not superstition.

3. Анна утверждает, что можно записать число, кратное $2023^{2023^{2023}}$, не используя цифры «0» и последовательностей цифр «13» и «666», а суеверный Тимур говорит, что это невозможно. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ с помощью математики, а не суеверий.

   Anna claims that it is possible to write a number that is a multiple of $2023^{2023^{2023}}$ without using the digit «0» and the sequences of digits «13» and «666», but superstitious Timur says that it's impossible. Who is right? Explain your answer using mathematics, not superstition.

4. Анна утверждает, что можно записать число, кратное $2023^{2024^{2023}}$, не используя цифры «0» и последовательностей цифр «13» и «666», а суеверный Тимур говорит, что это невозможно. Кто из них прав? Обоснуйте свой ответ с помощью математики, а не суеверий.

   Anna claims that it is possible to write a number that is a multiple of $2023^{2024^{2023}}$ without using the digit «0» and the sequences of digits «13» and «666», but superstitious Timur says that it's impossible. Who is right? Explain your answer using mathematics, not superstition.

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Докажем, что требуемое число можно записать при помощи только цифры «1» – а значит, Анна права.

Итак, пусть a_n – натуральное число, десятичная запись которого состоит из n «единиц», т.е. $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$, $\ldots$. Пусть r_n – остатки от деления a_n на 2023^{2024} при всевозможных натуральных n. Если среди $r_1, r_2, \ldots, r_{2023^{2024}}$ есть $r_k = 0$, то соответствующее a_k кратно 2023^{2024}, что доказывает правоту Анны.

Если же среди $r_1, r_2, \ldots, r_{2023^{2024}}$ нет «0», то, согласно принципу Дирихле, найдутся $r_i = r_j$ $(i \neq j$; не ограничивая общности, будем считать $i < j)$. Тогда $a_j - a_i = a_{j-i} \cdot 10^i$ кратно 2023^{2024}, при этом 10 взаимно просто с 2023 – а значит, a_{j-i} кратно 2023^{2024}, что доказывает правоту Анны.

Критерии оценивания:

- присутствует идея использовать в записи числа только одну цифру – 1 балл;
- при рассмотрении остатков использован принцип Дирихле – 2 балла;
- при рассмотрении остатков использован принцип Дирихле, доказано, что остаток при делении a_n на нужное число может быть равен 0 – 3 балла;
- верный ответ при незначительных ошибках в решении – 4 балла;
- полностью верные решение и ответ – 5 баллов.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let's prove that the required number can be written using only the digit «1», which means Anna is right.

First, let a_n be a positive integer which decimal notation consists of n digits «1», i.e. $a_1 = 1$, $a_2 = 11$, $a_3 = 111$, $\ldots$. Let r_n be the remainders from dividing a_n by 2023^{2024} for all possible integers n. If among

$r_1, r_2, \ldots, r_{2023^{2024}}$ there is $r_k = 0$, then the corresponding a_k is a multiple of 2023^{2024}, which proves Anna is right.
If among $r_1, r_2, \ldots, r_{2023^{2024}}$ there is no «0», then, according to the Dirichlet's principle, there exist $r_i = r_j$ ($i \neq j$; without loss of generality, we assume $i < j$). Then $a_j - a_i = a_{j-i} \cdot 10^i$ is a multiple of 2023^{2024}, while 10 is coprime with 2023 – thus, a_{j-i} is a multiple of 2023^{2024}, which proves Anna is right.

Criteria:

- there is an idea to use only one digit to write the required number – 1 point;
- when considering remainders, the Dirichlet principle was used – 2 points;
- when considering remainders, the Dirichlet principle was used, also it was proven that the remainder when dividing a_n by the required number can be equal to 0 – 3 points;
- correct answer with minor errors in the solution – 4 points;
- completely correct solution and answer – 5 points.

Task 6.

1. Из бо́льшего правильного 8-угольника вырезали меньший правильный 6-угольник. Опишите, как при помощи только математической линейки провести прямую так, чтобы она разделила оставшуюся фигуру на две равновеликие (т.е. равные по площади) фигуры. Помните, что математическая линейка позволяет проводить прямые через две отмеченные точки, а также отмечать пересечения прямых (отрезков, лучей), но не позволяет измерять длины отрезков.

   From the larger regular 8-gon a smaller regular 6-gon was cut out. Describe how to use a mathematical ruler to draw a straight line that divides the remaining figure into two figures with equal areas. Remember that a mathematical ruler allows you to draw straight lines through two marked points, as well as mark the intersections of straight lines (segments, rays), but does not allow you to measure the lengths of segments.

2. Из бо́льшего правильного 6-угольника вырезали меньший правильный 10-угольник. Опишите, как при помощи только математической линейки провести прямую так, чтобы она разделила оставшуюся фигуру на две равновеликие (т.е. равные по площади) фигуры. Помните, что математическая линейка позволяет проводить прямые через две отмеченные точки, а также отмечать пересечения прямых (отрезков, лучей), но не позволяет измерять длины отрезков.

   From the larger regular 6-gon a smaller regular 10-gon was cut out. Describe how to use a mathematical ruler to draw a straight line that divides the remaining figure into two figures with equal areas. Remember that a mathematical ruler allows you to draw straight lines through two marked points, as well as mark the intersections of straight lines (segments, rays), but does not allow you to measure the lengths of segments.

3. Из бо́льшего правильного 8-угольника вырезали меньший правильный 10-угольник. Опишите, как при помощи только математической линейки провести прямую так, чтобы она разделила оставшуюся фигуру на две равновеликие (т.е. равные по площади) фигуры. Помните, что математическая линейка позволяет проводить прямые через две отмеченные точки, а также отмечать пересечения прямых (отрезков, лучей), но не позволяет измерять длины отрезков.

From the larger regular 8-gon a smaller regular 10-gon was cut out. Describe how to use a mathematical ruler to draw a straight line that divides the remaining figure into two figures with equal areas. Remember that a mathematical ruler allows you to draw straight lines through two marked points, as well as mark the intersections of straight lines (segments, rays), but does not allow you to measure the lengths of segments.

4. Из бо́льшего правильного 10-угольника вырезали меньший правильный 6-угольник. Опишите, как при помощи только математической линейки провести прямую так, чтобы она разделила оставшуюся фигуру на две равновеликие (т.е. равные по площади) фигуры. Помните, что математическая линейка позволяет проводить прямые через две отмеченные точки, а также отмечать пересечения прямых (отрезков, лучей), но не позволяет измерять длины отрезков.

   From the larger regular 10-gon a smaller regular 6-gon was cut out. Describe how to use a mathematical ruler to draw a straight line that divides the remaining figure into two figures with equal areas. Remember that a mathematical ruler allows you to draw straight lines through two marked points, as well as mark the intersections of straight lines (segments, rays), but does not allow you to measure the lengths of segments.

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Здесь и далее будем называть центром правильного $2n$-угольника центр описанной около него окружности – он располагается на пересечении наибольших диагоналей $2n$-угольника. Заметим, что произвольная прямая l, проходящая через центр правильного $2n$-угольника, делит его на два равных (а значит, и равновеликих) многоугольника: они совмещаются поворотом вокруг центра исходного $2n$-угольника на $180°$.

Пусть A – центр исходного (бо́льшего) 8-угольника, а B – центр меньшего 6-угольника. Тогда прямая AB делит каждый из них на два равновеликих многоугольника, т.е. по каждую сторону AB лежит половина площади каждого из двух упомянутых многоугольников – а значит, эта прямая удовлетворяет условиям задачи.

Чтобы провести такую прямую, найдем точки A, B: для этого проведем по две наибольшие диагонали исходных 8-угольника и 6-угольника. Теперь остается только отметить точки A, B пересечения упомянутых диагоналей, и затем провести прямую AB.

Критерии оценивания:

- описана требуемая прямая, но не представлен алгоритм ее построения – 1 балл;
- представлен алгоритм построения без доказательства – 3 балла;
- представлен алгоритм построения с доказательством – 5 баллов.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Here and later we will call the center of a regular $2n$-gon the center of its circumcircle – it is located at the intersection of the largest diagonals of the $2n$-gon. Note that an arbitrary line l passing through the center of a regular $2n$-gon divides it into two equal (and therefore having equal areas) polygons: they coincide after rotating around the center of the original $2n$-gon by $180°$.

Let A be the center of the original (larger) octagon, and B the center of the smaller 6-gon. Then the line AB divides each of them into two equal polygons, i.e. by each side from AB lies half the area of each of the two polygons, which means that the line satisfies the task's conditions.

To draw such a line, we find points A, B: to do that, we draw the two largest diagonals of the original octagon and hexagon. Now all that remains is to mark the intersection points A, B of the diagonals, and then draw the line AB.

Criteria:

- the required line is described, but the algorithm for its construction is not presented – 1 point;
- the construction algorithm is presented without proof – 3 points;
- the construction algorithm with proof is presented – 5 points.