7^{th} degree

Task 1.

1. В январе некоторого года четвергов больше, чем вторников, а суббот меньше, чем пятниц. На какое число приходится последний понедельник этого января?

   In some year, January has more Thursdays than Tuesdays, and less Saturdays than Fridays. What number in the January has its last Monday?

   Answer: 27

2. В январе некоторого года четвергов больше, чем вторников, а суббот меньше, чем пятниц. На какое число приходится третий четверг этого января?

   In some year, January has more Thursdays than Tuesdays, and less Saturdays than Fridays. What number in the January has its third Thursday?

   Answer: 16

3. В январе некоторого года четвергов больше, чем вторников, а суббот меньше, чем пятниц. На какое число приходится четвертая среда этого января?

   In some year, January has more Thursdays than Tuesdays, and less Saturdays than Fridays. What number in the January has its fourth Wednesday?

   Answer: 22

4. В январе некоторого года четвергов больше, чем вторников, а суббот меньше, чем пятниц. На какое число приходится первый вторник этого января?

   In some year, January has more Thursdays than Tuesdays, and less Saturdays than Fridays. What number in the January has its first Tuesday?

   Answer: 7

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* В каждом январе 31 день, что составляет 4 полные недели и еще 3 дня – значит, никакой день недели не встретится меньше 4 раз и больше 5 раз. Из условия следует, что в указанном январе было 4 вторника, 4 субботы, 5 четвергов и 5 пятниц.

Если январь начинается с воскресенья, понедельника или вторника, то в нем 5 вторников (противоречит условию). Если январь начинается с четверга, пятницы или субботы, то в нем 5 суббот (тоже противоречит условию). Таким образом, для соблюдения условий январь должен начинаться со среды, а значит, заканчиваться пятницей 31-го, т.е. последний понедельник приходится на 27 января.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Each January has 31 days, which is 4 full weeks and 3 more days, which means that no day of a week occurs less than 4 times or more than 5 times. From the condition it follows that in the given January there are 4 Tuesdays, 4 Saturdays, 5 Thursdays and 5 Fridays.

If January begins on a Sunday, Monday or Tuesday, then it has 5 Tuesdays (which contradicts the condition). If January begins on Thursday, Friday or Saturday, then it has 5 Saturdays (also contrary to the condition). Thus, in order to comply with the conditions, January must begin with Wednesday, which means it must end on Friday the 31st, i.e. the last Monday appears on January 27th.

Task 2.

1. В классе учатся 6 девочек и 9 мальчиков. Было решено создать из учеников этого класса наибольшее количество школьных чатов в учебном профиле «Сферум», в каждом из которых будет хотя бы одна девочка. Сколько чатов будет создано?

   There are 6 girls and 9 boys in the class. It was decided to create the largest number of school chats in the «Spherum» educational profile from the students of this class, with each of the chats having at least one girl. How many chats will be created?

   Answer: 32256

2. В классе учатся 7 девочек и 10 мальчиков. Было решено создать из учеников этого класса наибольшее количество школьных чатов в учебном профиле «Сферум», в каждом из которых будет хотя бы одна девочка. Сколько чатов будет создано?

   There are 7 girls and 10 boys in the class. It was decided to create the largest number of school chats in the «Spherum» educational profile from the students of this class, with each of the chats having at least one girl. How many chats will be created?

   Answer: 130048

3. В классе учатся 6 девочек и 7 мальчиков. Было решено создать из учеников этого класса наибольшее количество школьных чатов в учебном профиле «Сферум», в каждом из которых будет хотя бы одна девочка. Сколько чатов будет создано?

   There are 6 girls and 7 boys in the class. It was decided to create the largest number of school chats in the «Spherum» educational profile from the students of this class, with each of the chats having at least one girl. How many chats will be created?

   Answer: 8064

4. В классе учатся 6 девочек и 10 мальчиков. Было решено создать из учеников этого класса наибольшее количество школьных чатов в учебном профиле «Сферум», в каждом из которых будет хотя бы одна девочка. Сколько чатов будет создано?

   There are 6 girls and 10 boys in the class. It was decided to create the largest number of school chats in the «Spherum» educational profile from the students of this class, with each of the chats having at least one girl. How many chats will be created?

   Answer: 64512

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Есть ровно 2^n способов выбрать подмножество из множества с n элементами – значит, всего из учеников этого класса можно составить $2^{15} = 32768$ чатов. Составить чат без девочек можно $2^9 = 512$ способами, т.к. в классе 9 мальчиков. Значит, остальных чатов, в которых будет хотя бы по одной девочке, будет $32768 - 512 = 32256$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* There are 2^n ways to select a subset from a set with n elements, thus there can be $2^{15} = 32768$ chats created from the students in the class. Also there can be $2^9 = 512$ chats without girls since there are 9 boys in the class. By that, the rest of the chats will have at least one girl, and there will be $32768 - 512 = 32256$ such chats.

Task 3.

1. На острове живут два племени – рыцари (всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). Однажды 2023 островитянина сели за круглый стол, и каждый из них сказал: «среди двух моих соседей есть мой соплеменник». Потом пришел еще один лжец и сел за стол. При каком наибольшем количестве рыцарей можно гарантировать, что не все смогут повторить утверждение «среди двух моих соседей есть мой соплеменник»?

   Two tribes live on the island: knights (who always tell the truth) and liars (who always lie). One day, 2023 islanders sat down at a round table, and each of them said: «among my two neighbors there is my fellow tribesman». Then another liar came and sat down at the table. What is the largest number of knights that can guarantee that not everyone will be able to repeat the statement «among my two neighbors there is my fellow tribesman»?

   Answer: 1517

2. На острове живут два племени – рыцари (всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). Однажды 9999 островитян сели за круглый стол, и каждый из них сказал: «среди двух моих соседей есть мой соплеменник». Потом пришел еще один лжец и сел за стол. При каком наибольшем количестве рыцарей можно гарантировать, что не все смогут повторить утверждение «среди двух моих соседей есть мой соплеменник»?

   Two tribes live on the island: knights (who always tell the truth) and liars (who always lie). One day, 9999 islanders sat down at a round table, and each of them said: «among my two neighbors there is my fellow tribesman». Then another liar came and sat down at the table. What is the largest number of knights that can guarantee that not everyone will be able to repeat the statement «among my two neighbors there is my fellow tribesman»?

   Answer: 7499

3. На острове живут два племени – рыцари (всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). Однажды 5432 островитянина сели за круглый стол, и каждый из них сказал: «среди двух моих соседей есть мой соплеменник». Потом пришел еще один лжец и сел за стол. При каком наибольшем количестве рыцарей можно гарантировать, что не все смогут повторить утверждение «среди двух моих соседей есть мой соплеменник»?

   Two tribes live on the island: knights (who always tell the truth) and liars (who always lie). One day, 5432 islanders sat down at a round table, and each of them said: «among my two neighbors there is my fellow tribesman». Then another liar came and sat down at the table. What is the largest number of knights that can guarantee that not everyone will be able to repeat the statement «among my two neighbors there is my fellow tribesman»?

   Answer: 4074

4. На острове живут два племени – рыцари (всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). Однажды 6002 островитянина сели за круглый стол, и каждый из них сказал: «среди двух моих соседей есть мой соплеменник». Потом пришел еще один лжец и сел за стол. При каком наибольшем количестве рыцарей можно гарантировать, что не все смогут повторить утверждение «среди двух моих соседей есть мой соплеменник»?

   Two tribes live on the island: knights (who always tell the truth) and liars (who always lie). One day, 6002 islanders sat down at a round table, and each of them said: «among my two neighbors there is my fellow tribesman». Then another liar came and sat down at the table. What is the largest number of knights that can guarantee that not everyone will be able to repeat the statement «among my two neighbors there is my fellow tribesman»?

   Answer: 4501

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Ясно, что два лжеца не могут сидеть рядом, а с каждым рыцарем сидит хотя бы один рыцарь – значит, все сидящие за столом разбиты на группы рыцарей, между которыми сидят по одному лжецу. Заметим, что если в какой-то из таких групп есть хотя бы 4 рыцаря, то в эту группу может «вклиниться» опоздавший лжец: он садится так, чтобы с каждой стороны от него сидели хотя бы два рыцаря. Итак, в каждой упомянутой группе либо 2, либо 3 рыцаря.
Пусть есть m групп с тремя рыцарями и n групп с двумя рыцарями. Тогда $4m + 3n = 2023$ (каждой группе соответствует ровно один лжец), а общее число рыцарей равно $3m + 2n$. Далее $n = (2023 - 4m)/3$, откуда

$$3m + 2n = 3m + 2 \cdot (2023 - 4m)/3 = 3m + 2 \cdot (2022/3 - m - (m-1)/3) = m + 1348 - 2 \cdot \frac{m-1}{3},$$

откуда $m = 3k + 1$ для некоторого целого k (иначе общее число рыцарей не будет целым числом). Получим, что общее число рыцарей за столом равно $3k + 1349 - 2k = k + 1349$, причем $4m = 4(3k+1) \leq 2023$, откуда $k \leq 2019/12 = 168.25$, т.е. наибольшее целое $k = 168$. Итак, наибольшее возможное число рыцарей равно $168 + 1349 = 1517$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* It is clear that two liars cannot sit next to each other, and at least one knight sits next to a knight, which means that everyone sitting at the table is divided into groups of knights with one liar sitting between the groups. Note that if in any of these groups there are at least 4 knights, then a new liar can «fit» into this group: he sits down in such way that at least two knights sit on each side of him. So, in each group there are either 2 or 3 knights.
Let there be m groups with three knights and n groups with two knights. Then $4m + 3n = 2023$ (each group corresponds to exactly one liar), and the total number of knights is $3m + 2n$. We have $n = (2023 - 4m)/3$, thus

$$3m + 2n = 3m + 2 \cdot (2023 - 4m)/3 = 3m + 2 \cdot (2022/3 - m - (m-1)/3) = m + 1348 - 2 \cdot \frac{m-1}{3},$$

thus $m = 3k+1$ for some integer k (otherwise the total number of knights will not be an integer). We get the total number of knights at the table as $3k+1349-2k = k+1349$, with $4m = 4(3k+1) \leq 2023$, thus $k \leq 2019/12 = 168.25$, i.e. the largest possible value of k is 168. Finally, the largest possible number of knights is $168 + 1349 = 1517$.

Task 4.

1. Натуральное число a, в десятичной записи оканчивающееся на цифру d, удовлетворяет равенству

   $$\frac{a}{891} = 0.d4d4d4d4\ldots = 0.(d4)$$

   – периодическая десятичная дробь. Найдите a.

   Positive integer a ends with decimal digit d and satisfies

   $$\frac{a}{891} = 0.d4d4d4d4\ldots = 0.(d4)$$

   – periodical decimal fraction. Find a.

   Answer: 576

2. Натуральное число a, кратное цифре d $(2 \leq d \leq 9)$, удовлетворяет равенству

   $$\frac{a}{495} = 0.0d6d6d6d6\ldots = 0.0(d6)$$

   – периодическая десятичная дробь. Найдите a.

Positive integer a is divisible by the decimal digit d ($2 \le d \le 9$) and satisfies

$$\frac{a}{495} = 0.0d6d6d6d6\ldots = 0.0(d6)$$

– periodical decimal fraction. Find a.

Answer: 18

3. Натуральное число a, в десятичной записи оканчивающееся на цифру $d > 0$, удовлетворяет равенству

$$\frac{a}{693} = 0.3d3d3d3d\ldots = 0.(3d)$$

– периодическая десятичная дробь. Найдите a.

Positive integer a ends with decimal digit $d > 0$ and satisfies

$$\frac{a}{693} = 0.3d3d3d3d\ldots = 0.(3d)$$

– periodical decimal fraction. Find a.

Answer: 245

4. Натуральное число a, в десятичной записи оканчивающееся на цифру d, удовлетворяет равенству

$$\frac{a}{396} = 0.d3d3d3d3\ldots = 0.(d3)$$

– периодическая десятичная дробь. Найдите a.

Positive integer a ends with decimal digit d and satisfies

$$\frac{a}{396} = 0.d3d3d3d3\ldots = 0.(d3)$$

– periodical decimal fraction. Find a.

Answer: 92

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть $x = 0.(d4)$, тогда $100x = \overline{d4}.(d4)$ и $100x - x = 99x = \overline{d4}$, откуда $x = \overline{d4}/99 = \frac{10d+4}{99}$. Первоначальное равенство можно представить в виде $\frac{a}{891} = \frac{10d+4}{99} \Rightarrow a = 90 \cdot d + 36$. Очевидно, число a при любом d оканчивается на 6, откуда $d = 6$ и $a = 576$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let $x = 0.(d4)$, then $100x = \overline{d4}.(d4)$ and $100x - x = 99x = \overline{d4}$, thus $x = \overline{d4}/99 = \frac{10d+4}{99}$. The initial equality can be represented as $\frac{a}{891} = \frac{10d+4}{99} \Rightarrow a = 90 \cdot d + 36$. Obviously, the number a ends with 6 for any d, thus $d = 6$ and $a = 576$.

Task 5.

1. Анна придумала новую шахматную фигуру – пегас (крылатый конь): он может ходить на 10 клеток в одном направлении (по горизонтали или вертикали), а затем на 8 клеток в перпендикулярном направлении. Можно ли покрасить некоторые клетки бесконечной белой доски в черный цвет так, чтобы каждым своим ходом пегас попадал в клетку противоположного цвета?

   Anna came up with a new chess piece – pegasus (winged horse): it can move 10 squares in one direction (horizontally or vertically), and then 8 squares in a perpendicular direction. Is it possible to paint in black some squares of an infinite white board so that each move the pegasus switches its cell's color?

2. Анна придумала новую шахматную фигуру – пегас (крылатый конь): он может ходить на 10 клеток в одном направлении (по горизонтали или вертикали), а затем на 4 клетки в перпендикулярном направлении. Можно ли покрасить некоторые клетки бесконечной белой доски в черный цвет так, чтобы каждым своим ходом пегас попадал в клетку противоположного цвета?

   Anna came up with a new chess piece – pegasus (winged horse): it can move 10 squares in one direction (horizontally or vertically), and then 4 squares in a perpendicular direction. Is it possible to paint in black some squares of an infinite white board so that each move the pegasus switches its cell's color?

3. Анна придумала новую шахматную фигуру – пегас (крылатый конь): он может ходить на 8 клеток в одном направлении (по горизонтали или вертикали), а затем на 6 клеток в перпендикулярном направлении. Можно ли покрасить некоторые клетки бесконечной белой доски в черный цвет так, чтобы каждым своим ходом пегас попадал в клетку противоположного цвета?

   Anna came up with a new chess piece – pegasus (winged horse): it can move 8 squares in one direction (horizontally or vertically), and then 6 squares in a perpendicular direction. Is it possible to paint in black some squares of an infinite white board so that each move the pegasus switches its cell's color?

4. Анна придумала новую шахматную фигуру – пегас (крылатый конь): он может ходить на 6 клеток в одном направлении (по горизонтали или вертикали), а затем на 4 клетки в перпендикулярном направлении. Можно ли покрасить некоторые клетки бесконечной белой доски в черный цвет так, чтобы каждым своим ходом пегас попадал в клетку противоположного цвета?

   Anna came up with a new chess piece – pegasus (winged horse): it can move 6 squares in one direction (horizontally or vertically), and then 4 squares in a perpendicular direction. Is it possible to paint in black some squares of an infinite white board so that each move the pegasus switches its cell's color?

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Разобьем доску на квадраты 2×2 и раскрасим эти квадраты в шахматном порядке. Тогда после перемещения на 10 клеток по горизонтали или вертикали цвет клетки пегаса изменится, а после последующего перемещения на 8 клеток в перпендикулярном направлении цвет клетки уже не поменяется.

Критерии оценивания:

- приведен пример подходящей раскраски – 2 балла;
- доказано, что приведенный пример удовлетворяет условию – 3 балла.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let's divide the board into 2×2 squares and color these squares in a chessboard pattern. Then, after pegasus moves 10 steps horizontally or vertically, the color of its cell will change, but after a subsequent move of 8 cells in a perpendicular direction, the color of the cell will not change.

Criteria:

- an example of a suitable coloring is given – 2 points;
- it is proved that the given example satisfies the task's condition – 3 points.

Task 6.

1. На плоскости дан 20-угольник. Петя прошел вдоль его сторон, рядом с каждой из них записав дробь, в числителе которой – длина этой стороны, а в знаменателе – сумма длин остальных сторон 20-угольника. Докажите, что сумма всех записанных дробей меньше 2.

   A 20-gon is given on the plane. Peter walked along its sides, writing down a fraction next to each of them: the numerator of a fraction is the length of the side, and the denominator is the sum of lengths of the remaining sides of the 20-gon. Prove that the sum of all the written fractions is less than 2.

2. На плоскости дан 15-угольник. Петя прошел вдоль его сторон, рядом с каждой из них записав дробь, в числителе которой – длина этой стороны, а в знаменателе – сумма длин остальных сторон 15-угольника. Докажите, что сумма всех записанных дробей меньше 2.

   A 15-gon is given on the plane. Peter walked along its sides, writing down a fraction next to each of them: the numerator of a fraction is the length of the side, and the denominator is the sum of lengths of the remaining sides of the 15-gon. Prove that the sum of all the written fractions is less than 2.

3. На плоскости дан 2023-угольник. Петя прошел вдоль его сторон, рядом с каждой из них записав дробь, в числителе которой – длина этой стороны, а в знаменателе – сумма длин остальных сторон 2023-угольника. Докажите, что сумма всех записанных дробей меньше 2.

   A 2023-gon is given on the plane. Peter walked along its sides, writing down a fraction next to each of them: the numerator of a fraction is the length of the side, and the denominator is the sum of lengths of the remaining sides of the 2023-gon. Prove that the sum of all the written fractions is less than 2.

4. На плоскости дан 100-угольник. Петя прошел вдоль его сторон, рядом с каждой из них записав дробь, в числителе которой – длина этой стороны, а в знаменателе – сумма длин остальных сторон 100-угольника. Докажите, что сумма всех записанных дробей меньше 2.

   A 100-gon is given on the plane. Peter walked along its sides, writing down a fraction next to each of them: the numerator of a fraction is the length of the side, and the denominator is the sum of lengths of the remaining sides of the 100-gon. Prove that the sum of all the written fractions is less than 2.

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ – длины сторон 20-угольника, тогда $P = a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ – его периметр. Заметим, что каждая сторона многоугольника меньше суммы остальных – значит, сумма остальных больше полупериметра: $P - a_i > P/2$ для любой стороны a_i. Рассмотрим сумму дробей, записанных Петей:

$$\frac{a_1}{P-a_1} + \frac{a_2}{P-a_2} + \cdots + \frac{a_{20}}{P-a_{20}} < \frac{a_1}{P/2} + \frac{a_2}{P/2} + \cdots + \frac{a_{20}}{P/2} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}}{P/2} = 2,$$

что и требовалось доказать.

Критерии оценивания:

- отмечено, что длина стороны многоугольника меньше суммы длин остальных его сторон – 2 балла;
- помимо указанного в предыдущем пункте, отмечено, что $P - a_i > P/2$ – 1 балл;
- приведены прочие рассуждения, вместе с предыдущими пунктами составляющие решение задачи – 2 балла.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ be the lengths of the sides of the 20-gon, then $P = a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$ is its perimeter. Note that each side of the polygon is less than the sum of the others, which means that the sum of the others is greater than the half of the perimeter: $P - a_i > P/2$ for any side a_i. Consider the sum of the fractions written by Peter:

$$\frac{a_1}{P-a_1} + \frac{a_2}{P-a_2} + \cdots + \frac{a_{20}}{P-a_{20}} < \frac{a_1}{P/2} + \frac{a_2}{P/2} + \cdots + \frac{a_{20}}{P/2} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}}{P/2} = 2,$$

Q.E.D.

Criteria:

- it is noted that the length of a side of a polygon is less than the sum of the lengths of its other sides – 2 points;
- in addition to what is indicated in the previous row, it is noted that $P - a_i > P/2$ – 1 point;
- other reasoning is given, together with the previous ones, completing the solution to the task – 2 points.

8-9^{th} degree

Task 1.

1. Натуральное число a, в десятичной записи оканчивающееся на цифру d, удовлетворяет равенству
$$\frac{a}{891} = 0.d4d4d4d4\ldots = 0.(d4)$$
– периодическая десятичная дробь. Найдите a.

   Positive integer a ends with decimal digit d and satisfies
$$\frac{a}{891} = 0.d4d4d4d4\ldots = 0.(d4)$$
– periodical decimal fraction. Find a.

   Answer: 576

2. Натуральное число a, кратное цифре d ($2 \leq d \leq 9$), удовлетворяет равенству
$$\frac{a}{495} = 0.0d6d6d6d6\ldots = 0.0(d6)$$
– периодическая десятичная дробь. Найдите a.

   Positive integer a is divisible by the decimal digit d ($2 \leq d \leq 9$) and satisfies
$$\frac{a}{495} = 0.0d6d6d6d6\ldots = 0.0(d6)$$
– periodical decimal fraction. Find a.

   Answer: 18

3. Натуральное число a, в десятичной записи оканчивающееся на цифру $d > 0$, удовлетворяет равенству
$$\frac{a}{693} = 0.3d3d3d3d\ldots = 0.(3d)$$
– периодическая десятичная дробь. Найдите a.

   Positive integer a ends with decimal digit $d > 0$ and satisfies
$$\frac{a}{693} = 0.3d3d3d3d\ldots = 0.(3d)$$
– periodical decimal fraction. Find a.

   Answer: 245

4. Натуральное число a, в десятичной записи оканчивающееся на цифру d, удовлетворяет равенству
$$\frac{a}{396} = 0.d3d3d3d3\ldots = 0.(d3)$$
– периодическая десятичная дробь. Найдите a.

   Positive integer a ends with decimal digit d and satisfies
$$\frac{a}{396} = 0.d3d3d3d3\ldots = 0.(d3)$$
– periodical decimal fraction. Find a.

   Answer: 92

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть $x = 0.(d4)$, тогда $100x = \overline{d4.(d4)}$ и $100x - x = 99x = \overline{d4}$, откуда $x = \overline{d4}/99 = \frac{10d+4}{99}$. Первоначальное равенство можно представить в виде $\frac{a}{891} = \frac{10d+4}{99} \Rightarrow a = 90 \cdot d + 36$. Очевидно, число a при любом d оканчивается на 6, откуда $d = 6$ и $a = 576$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let $x = 0.(d4)$, then $100x = \overline{d4.(d4)}$ and $100x - x = 99x = \overline{d4}$, thus $x = \overline{d4}/99 = \frac{10d+4}{99}$. The initial equality can be represented as $\frac{a}{891} = \frac{10d+4}{99} \Rightarrow a = 90 \cdot d + 36$. Obviously, the number a ends with 6 for any d, thus $d = 6$ and $a = 576$.

Task 2.

1. Дано множество A натуральных чисел, не превосходящих 15. Сколькими способами можно выбрать из него подмножество, содержащее хотя бы одно простое число?

   Given set A of all positive integers not exceeding 15. How many ways are there to choose its subset which contains at least one prime number?

   Answer: 32256

2. Дано множество A натуральных чисел, не превосходящих 17. Сколькими способами можно выбрать из него подмножество, содержащее хотя бы одно простое число?

   Given set A of all positive integers not exceeding 17. How many ways are there to choose its subset which contains at least one prime number?

   Answer: 130048

3. Дано множество A натуральных чисел, не превосходящих 13. Сколькими способами можно выбрать из него подмножество, содержащее хотя бы одно простое число?

   Given set A of all positive integers not exceeding 13. How many ways are there to choose its subset which contains at least one prime number?

   Answer: 8064

4. Дано множество A натуральных чисел, не превосходящих 16. Сколькими способами можно выбрать из него подмножество, содержащее хотя бы одно простое число?

   Given set A of all positive integers not exceeding 16. How many ways are there to choose its subset which contains at least one prime number?

   Answer: 64512

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Есть ровно 2^n способов выбрать подмножество из множества с n элементами – значит, из множества A можно выбрать подмножество $2^{15} = 32768$ способами. Множество A содержит шесть простых чисел $(2, 3, 5, 7, 11, 13)$, остальные девять не являются простыми, и составить подмножество только с ними можно $2^9 = 512$ способами. Остальные подмножества A будут содержать простое число, их количество равно $32768 - 512 = 32256$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* There are 2^n ways to choose subset of a set with n elements, thus there are $2^{15} = 32768$ ways to choose subset from the set A. There are 6 primes $(2, 3, 5, 7, 11, 13)$ in the set, so other 9 numbers are not prime and we can choose $2^9 = 512$ subsets of A using only these 9 non-primes. Other $32768 - 512 = 32256$ subsets will contain at least one prime each.

Task 3.

1. Есть чашечные весы (чашки вмещают любой объем), гирька весом в 1 грамм, мешок сахарного песка и совочек. Дополнительных ёмкостей нет, в чашке две кучки сахара сразу смешиваются. Определите минимальное число взвешиваний, необходимых для того, чтобы отмерить 2023 грамма сахара.

   There are weighing scale (its cups can hold any volume), a 1 gram weight, and a bag of granulated sugar and a scoop. There are no additional containers; in a cup, two piles of sugar are immediately mixed. Determine the minimum number of weighings required to measure 2023 grams of sugar.

   Answer: 11

2. Есть чашечные весы (чашки вмещают любой объем), гирька весом в 2 грамма, мешок сахарного песка и совочек. Дополнительных ёмкостей нет, в чашке две кучки сахара сразу смешиваются. Определите минимальное число взвешиваний, необходимых для того, чтобы отмерить 2024 грамма сахара.

   There are weighing scale (its cups can hold any volume), a 2 grams weight, and a bag of granulated sugar and a scoop. There are no additional containers; in a cup, two piles of sugar are immediately mixed. Determine the minimum number of weighings required to measure 2024 grams of sugar.

   Answer: 10

3. Есть чашечные весы (чашки вмещают любой объем), гирька весом в 1 грамм, мешок сахарного песка и совочек. Дополнительных ёмкостей нет, в чашке две кучки сахара сразу смешиваются. Определите минимальное число взвешиваний, необходимых для того, чтобы отмерить 199 грамм сахара.

   There are weighing scale (its cups can hold any volume), a 1 gram weight, and a bag of granulated sugar and a scoop. There are no additional containers; in a cup, two piles of sugar are immediately mixed. Determine the minimum number of weighings required to measure 199 grams of sugar.

   Answer: 8

4. Есть чашечные весы (чашки вмещают любой объем), гирька весом в 2 грамма, мешок сахарного песка и совочек. Дополнительных ёмкостей нет, в чашке две кучки сахара сразу смешиваются. Определите минимальное число взвешиваний, необходимых для того, чтобы отмерить 198 грамм сахара.

   There are weighing scale (its cups can hold any volume), a 2 grams weight, and a bag of granulated sugar and a scoop. There are no additional containers; in a cup, two piles of sugar are immediately mixed. Determine the minimum number of weighings required to measure 198 grams of sugar.

   Answer: 7

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть k – количство грамм сахара на одной из чаш весов. За одно взвешивание мы можем удвоить k (положив на другую чашу весов столько же сахара, уравновесив чаши) или разделить k пополам (разделив имеющуюся кучку на две равные по весу). Имея дополнительно гирю массой n грамм, мы можем за одно взвешивание получить $k+n$ или $k-n$ грамм. Сочетая описанные действия, можно за одно взвешивание получить $2k+n$ или $2k-n$ грамм.

$$2023 = 2\cdot 1011+1 = 2\cdot(2\cdot 505+1)+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 252+1)+1)+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 2\cdot 126+1)+1)+1 = \cdots$$
$$\cdots = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1-1)+1)+1)+1$$

– здесь количество умножений на 2 равно количеству взвешиваний, т.е. 11 взвешиваний хватит:

$$0\to 1\to 3\to 7\to 15\to 31\to 63\to 127\to 253\to 506\to 1012\to 2023$$

Покажем, что 10 взвешиваний всегда недостаточно. Для этого сначала заметим, что в условиях задачи, имея гирю в n грамм и кучку в k грамм сахара, за одно взвешивание мы можем получить не более $2k+n$ грамм сахара. Тогда наибольший возможный вес, который можно отмерить за 10 взвешиваний, равен

$$0 \to 1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 127 \to 255 \to 511 \to 1023$$

грамма.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let k be the number of grams of sugar on one of the cups. During one weighing we can double k (putting the same amount of sugar on the other cup of the scale, balancing the cups) or divide k in half (dividing the existing cup into two equally weighting ones). Having an additional weight of n grams, we can obtain $k+n$ or $k-n$ grams in one weighing. By combining the described actions we can obtain $2k+n$ or $2k-n$ grams in one weighing.

$$2023 = 2\cdot 1011+1 = 2\cdot(2\cdot 505+1)+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 252+1)+1)+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 2\cdot 126+1)+1)+1 = \cdots$$
$$\cdots = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1-1)+1)+1)+1$$

– here the number of multiplications by 2 is equal to the number of weightings, thus 11 of them is enough to obtain 2023 grams of sugar:

$$0 \to 1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 127 \to 253 \to 506 \to 1012 \to 2023$$

Lets prove that 10 weighings are never enough for it. To do that, first note that while having a weight of n grams and a pile of k grams of sugar, we can obtain at most $2k+n$ grams of sugar with one weighing. Then the largest possible weight that can be obtained with 10 weighings is

$$0 \to 1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 127 \to 255 \to 511 \to 1023$$

grams.

Task 4.

1. В треугольной комнате с углами A, B, C установлена непрозрачная перегородка CO (от пола до потолка) так, что из угла B видна ровно половина стены AC, а из угла A – ровно треть стены BC. Игорь хочет установить в комнате умную колонку «VK Капсула» с Марусей так, чтобы любая прямая, параллельная полу комнаты и проходящая через колонку, пересекала либо перегородку CO, либо стену AB. Стены комнаты и перегородка перпендикулярны полу и имеют форму прямоугольников, колонку можно считать точечным объектом.
   Какая часть площади комнаты подходит Игорю для установки колонки? Запишите ответ в виде десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

   In a triangular room with corners A, B, C, a new opaque wall CO (from the floor to the ceiling) is installed in such way that exactly half of the wall AC is visible from the corner B, and exactly a third of the BC wall is visible from the corner A. Igor wants to install a smart speaker «VK Capsule» with Marusya in the room so that any straight line parallel to the floor of the room and passing through the speaker will intersect either the wall CO or the wall AB. The walls of the room are perpendicular to the floor and have the shape of rectangles; the smart speaker can be considered a point object.
   What part of the room area is suitable for installing the speaker in the way Igor wants? Write your answer as a decimal, rounded to 2 decimal digits if necessary.

   Answer: 0.42

2. В треугольной комнате с углами A, B, C установлена непрозрачная перегородка CO (от пола до потолка) так, что из угла B видна ровно половина стены AC, а из угла A – ровно четверть стены BC. Игорь хочет установить в комнате умную колонку «VK Капсула» с Марусей так, чтобы любая прямая, параллельная полу комнаты и проходящая через колонку, пересекала либо перегородку CO, либо стену AB. Стены комнаты и перегородка перпендикулярны полу и имеют форму прямоугольников, колонку можно считать точечным объектом.
Какая часть площади комнаты подходит Игорю для установки колонки? Запишите ответ в виде десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

In a triangular room with corners A, B, C, a new opaque wall CO (from the floor to the ceiling) is installed in such way that exactly half of the wall AC is visible from the corner B, and exactly a quarter of the BC wall is visible from the corner A. Igor wants to install a smart speaker «VK Capsule» with Marusya in the room so that any straight line parallel to the floor of the room and passing through the speaker will intersect either the wall CO or the wall AB. The walls of the room are perpendicular to the floor and have the shape of rectangles; the smart speaker can be considered a point object.
What part of the room area is suitable for installing the speaker in the way Igor wants? Write your answer as a decimal, rounded to 2 decimal digits if necessary.

Answer: 0.45

3. В треугольной комнате с углами A, B, C установлена непрозрачная перегородка CO (от пола до потолка) так, что из угла B видна ровно треть стены AC, а из угла A – ровно четверть стены BC. Игорь хочет установить в комнате умную колонку «VK Капсула» с Марусей так, чтобы любая прямая, параллельная полу комнаты и проходящая через колонку, пересекала либо перегородку CO, либо стену AB. Стены комнаты и перегородка перпендикулярны полу и имеют форму прямоугольников, колонку можно считать точечным объектом.
Какая часть площади комнаты подходит Игорю для установки колонки? Запишите ответ в виде десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

In a triangular room with corners A, B, C, a new opaque wall CO (from the floor to the ceiling) is installed in such way that exactly a third of the wall AC is visible from the corner B, and exactly a quarter of the BC wall is visible from the corner A. Igor wants to install a smart speaker «VK Capsule» with Marusya in the room so that any straight line parallel to the floor of the room and passing through the speaker will intersect either the wall CO or the wall AB. The walls of the room are perpendicular to the floor and have the shape of rectangles; the smart speaker can be considered a point object.
What part of the room area is suitable for installing the speaker in the way Igor wants? Write your answer as a decimal, rounded to 2 decimal digits if necessary.

Answer: 0.58

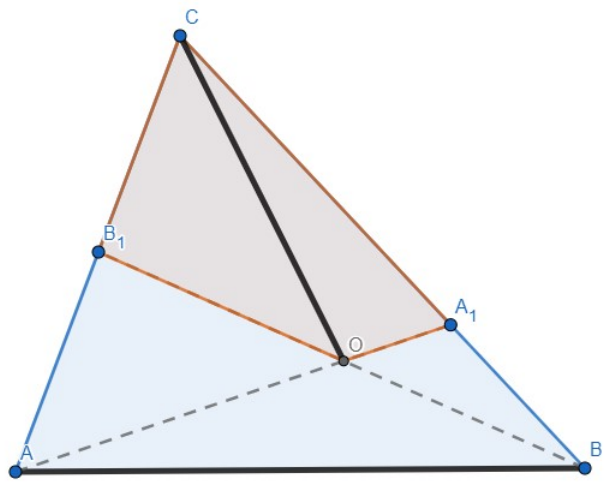
4. В треугольной комнате с углами A, B, C установлена непрозрачная перегородка CO (от пола до потолка) так, что из угла B видна ровно треть стены AC, а из угла A – ровно одна пятая часть стены BC. Игорь хочет установить в комнате умную колонку «VK Капсула» с Марусей так, чтобы любая прямая, параллельная полу комнаты и проходящая через колонку, пересекала либо перегородку CO, либо стену AB. Стены комнаты и перегородка перпендикулярны полу и имеют форму прямоугольников, колонку можно считать точечным объектом.
Какая часть площади комнаты подходит Игорю для установки колонки? Запишите ответ в виде десятичной дроби, при необходимости округленной до сотых.

In a triangular room with corners A, B, C, a new opaque wall CO (from the floor to the ceiling) is installed in such way that exactly a third of the wall AC is visible from the corner B, and exactly a fifth of the BC wall is visible from the corner A. Igor wants to install a smart speaker «VK Capsule» with Marusya in the room so that any straight line parallel to the floor of the room and passing through the speaker will intersect either the wall CO or the wall AB. The walls of the

room are perpendicular to the floor and have the shape of rectangles; the smart speaker can be considered a point object.
What part of the room area is suitable for installing the speaker in the way Igor wants? Write your answer as a decimal, rounded to 2 decimal digits if necessary.

Answer: 0.61

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Рассмотрим вид сверху: стены комнаты станут сторонами треугольника, а перегородка – отрезком, соединяющим его вершину с одной из внутренних точек. Тогда задачу можно переформулировать следующим образом: найти площадь геометрического места внутренних точек (ГМТ) P треугольника ABC, таких, что любая прямая, проходящая через P, пересекает либо AB, либо CO. Пусть прямые AO, BO пересекают стороны BC, AB треугольника в точках A_1, B_1, соответственно.



Докажем, что искомым ГМТ является четырехугольник CA_1OB_1. Рассмотрим произвольную внутреннюю точку этого четырехугольника; без ограничения общности будем считать ее внутренней точкой треугольника CB_1O. Проведем через P некоторую прямую l и предположим, что она не пересекает CO. Из этого следует, что она пересекает отрезки OB_1, CB_1. Пусть l пересекает B_1C в точке T. Тогда луч TP является внутренним для угла B_1TO, причем луч TO пересекает сторону AB исходного треугольника – а значит, луч TP также пересекает ее. Итак, любая внутренняя точка четырехугольника CA_1OB_1 входит в искомое ГМТ.
Теперь рассмотрим точки вне упомянутого четырехугольника и покажем, что они не обладают требуемым для искомого ГМТ свойством. Для внешних точек треугольника ABC это совсем очевидно (подлходит, например, прямая, проходящая через данную внешнюю точку параллельно одной из сторон $\triangle ABC$), для внутренних точек треугольника AOB – тоже (достаточно провести через данную точку прямую, параллельную AB). Остались два треугольника – AOB_1 и BOA_1. Рассмотрим первый из них (второй рассматривается аналогично). Итак, пусть P – внутренняя точка $\triangle AOB_1$. Проведем прямую PK, где K – произвольная точка отрезка BO, отличная от его концов: такая прямая не пересечет ни CO, ни AB.
Утверждение доказано.

Итак, требуется найти $\frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ABC}}$, причем $\frac{AB_1}{AC} = \frac{1}{2}$, $\frac{BA_1}{BC} = \frac{1}{3}$ по условию. Согласно теореме Менелая, $\frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{A_1B}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, откуда $\frac{AO}{OA_1} = 3 \Rightarrow \frac{AO}{AA_1} = \frac{3}{4}$. Далее

$$\frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ACA_1}} \cdot \frac{S_{ACA_1}}{S_{ABC}} = (1 - \frac{S_{AOB_1}}{S_{ACA_1}}) \cdot \frac{CA_1}{CB} =$$

$$(1 - \frac{AO}{AA_1} \cdot \frac{AB_1}{AC}) \cdot \frac{CA_1}{CB} = (1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2})\frac{2}{3} = \frac{5}{12} \approx 0.42$$

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let's look from the top to the room: its walls AB, BC, CA will become the sides of the triangle, and the wall

CO will become a segment connecting its vertex with one of the internal points. Then the problem can be reformulated as follows: find the area of the locus of the interior points P of the triangle ABC, such that any line passing through P intersects either AB or CO. Let the lines AO, BO intersect the sides BC, AB of the triangle at points A_1, B_1, respectively.

Let us prove that the required locus is the quadrilateral CA_1OB_1. Consider an arbitrary internal point of the quadrilateral; without loss of generality, we will consider it an internal point of the triangle CB_1O. Lets draw some line l through P and assume that it does not intersect CO. Then it intersects the segments OB_1, CB_1. Let l intersect B_1C at point T. Then the ray TP is internal to the angle B_1TO, and the ray TO intersects the side AB of the original triangle – and therefore the ray TP also intersects it. So, any internal point of the quadrilateral CA_1OB_1 is included in the desired locus.

Now let's consider points outside the mentioned quadrilateral and show that they do not have the property required for the desired locus. For external points of triangle ABC this is quite obvious (for example, a straight line passing through a given external point parallel to one of the sides of $\triangle ABC$ is suitable), for internal points of triangle AOB its obvious, too (it is enough to draw a straight line through this point parallel to AB). There are two triangles left – AOB_1 and BOA_1. Let's consider the first of them (the second one is considered similarly). So, let P be the internal point of $\triangle AOB_1$. Lets draw a line PK, where K is an arbitrary point of the segment BO that is different from its ends: such a line will not intersect either CO or AB.

Q.E.D.

So, we need to calculate $\frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ABC}}$ with $\frac{AB_1}{AC} = \frac{1}{2}$, $\frac{BA_1}{BC} = \frac{1}{3}$. Using Menelaus's theorem, we get $\frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{A_1B}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, thus $\frac{AO}{OA_1} = 3 \Rightarrow \frac{AO}{AA_1} = \frac{3}{4}$. Finally,

$$\frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ACA_1}} \cdot \frac{S_{ACA_1}}{S_{ABC}} = \left(1 - \frac{S_{AOB_1}}{S_{ACA_1}}\right) \cdot \frac{CA_1}{CB} =$$

$$\left(1 - \frac{AO}{AA_1} \cdot \frac{AB_1}{AC}\right) \cdot \frac{CA_1}{CB} = \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\right)\frac{2}{3} = \frac{5}{12} \approx 0.42$$

Task 5.

1. Через квадратное поле проходят 18 прямых дорог, которые делят его на 100 прямоугольных участков. Эти участки в шахматном порядке распределены между двумя братьями – Андреем и Борисом, причем все участки на диагонали Андрея оказались квадратными. Верно ли, что совокупная площадь участков Андрея не меньше совокупной площади участков Бориса?

   A square field has 18 of straight roads running through dividing it into 100 rectangular areas. These areas are divided between two brothers – Andrew and Boris – in chessboard order. Each area on Andrew's diagonal turned out to be of square shape. Is it true that total area of Andrew's land is not less than total area of Boris's land?

2. Через квадратное поле проходят 22 прямые дороги, которые делят его на 144 прямоугольных участка. Эти участки в шахматном порядке распределены между двумя братьями – Андреем и Борисом, причем все участки на диагонали Андрея оказались квадратными. Верно ли, что совокупная площадь участков Андрея не меньше совокупной площади участков Бориса?

   A square field has 22 of straight roads running through dividing it into 144 rectangular areas. These areas are divided between two brothers – Andrew and Boris – in chessboard order. Each area on Andrew's diagonal turned out to be of square shape. Is it true that total area of Andrew's land is not less than total area of Boris's land?

3. Через квадратное поле проходят 26 прямых дорог, которые делят его на 196 прямоугольных участков. Эти участки в шахматном порядке распределены между двумя братьями – Андреем и Борисом, причем все участки на диагонали Андрея оказались квадратными. Верно ли, что совокупная площадь участков Андрея не меньше совокупной площади участков Бориса?

   A square field has 26 of straight roads running through dividing it into 196 rectangular areas. These areas are divided between two brothers – Andrew and Boris – in chessboard order. Each area on Andrew's diagonal turned out to be of square shape. Is it true that total area of Andrew's land is not less than total area of Boris's land?

4. Через квадратное поле проходят 14 прямых дорог, которые делят его на 64 прямоугольных участка. Эти участки в шахматном порядке распределены между двумя братьями – Андреем и Борисом, причем все участки на диагонали Андрея оказались квадратными. Верно ли, что совокупная площадь участков Андрея не меньше совокупной площади участков Бориса?

   A square field has 14 of straight roads running through dividing it into 64 rectangular areas. These areas are divided between two brothers – Andrew and Boris – in chessboard order. Each area on Andrew's diagonal turned out to be of square shape. Is it true that total area of Andrew's land is not less than total area of Boris's land?

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Для начала заметим, что разделить прямоугольное поле на 100 прямоугольных участков 18 дорогами можно только проведя по 9 «горизонтальных» (по отношению к определенной заранее выбранной стороне поля) и «вертикальных» дорог. Действительно, пусть m – количество горизонтальных дорог, n – количество вертикальных дорог. Тогда

$$\begin{cases} m+n=18 \\ (m+1)(n+1)=100 \end{cases},$$

откуда $m=n=9$.

Раскрасим поле в два цвета (пусть участки Андрея будут чёрными, а участки Бориса – белыми) и пронумеруем полосы участков (между параллельными дорогами) по горизонтали и повертикали числами от 1 до 10. Сразу заметим, что совокупная площадь дорог постоянна и зависит только от их количества – а значит, не влияет на соотношение площадей белых и чёрных участков.

Чёрные участки бывают двух типов: одни стоят на пересечении полос с четными номерами, другие – на пересечении полос с нечётными номерами. Выкидывая сначала чётные горизонтали, потом чётные вертикали, получим чёрный квадрат (т.к. диагональные участки Андрея – квадратные согласно условию) со стороной a. Аналогичным образом выкидывая нечётные полосы, получим чёрный квадрат со стороной b. Итак, «чёрная» (т.е. принадлежащая Андрею) площадь равна a^2+b^2. Тогда «белая» площадь равна $(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$. Покажем, что «черная» площадь не меньше «белой»:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2+b^2 \geq 2ab,$$

что завершает решение задачи.

Критерии оценивания:

- участник выяснил количество «горизонтальных» и «вертикальных» дорог – 1 балл;
- получены верные выражения для сумм площадей участков Андрея и Бориса – 3 балла;
- доказано неравенство между полученными выражениями – 1 балл.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Note that dividing a rectangular field into 100 rectangular sections with 18 roads can only be done by drawing 9 «horizontal» (relative to a certain pre-selected side of the field) and «vertical» roads. Indeed, let m be the number of horizontal roads, and n be the number of vertical ones. Then

$$\begin{cases} m+n=18 \\ (m+1)(n+1)=100 \end{cases},$$

thus $m=n=9$.

Let's paint the field in two colors (let Andrew's areas be black and Boris's areas be white) and number the rows and columns of areas (between parallel roads) with numbers from 1 to 10. Let's also note that total area of the roads is constant and depends only on their quantity, and therefore does not affect the ratio of the areas of white and black areas.

There are two types of black areas: some are at the intersection of even-numbered rows and columns, others are at the intersection of odd-numbered ones. Throwing out first the even rows, then the even columns, we get a black square (since Andrew's diagonal areas are squares) with side a. Similarly, throwing out odd rows and columns, we get a black square with side b. So, the "black" area (i.e., belonging to Andrew) is equal to $a^2 + b^2$. Then the «white» area is equal to $(a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$. Lets show that the «black» area is not less than the «white»:

$$(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

which completes the solution.

Criteria:

- the participant found out the number of «horizontal» and «vertical» roads – 1 point;
- the correct expressions were obtained for the sums of the areas owned by Andrew and Boris – 3 points;
- the inequality between the obtained sums is proven – 1 point.

Task 6.

1. Искусственный интеллект справляется еще не со всеми задачами в словах. Вот непридуманная история: некоторой системе искусственного интеллекта было предложено найти максимальное значение отношения $\frac{a \cdot b \cdot c}{a+b+c}$, где $\overline{abc}$ – трехзначное число в десятичной записи. Система «рассудила» так:
чтобы отношение $\frac{x}{y}$ имело максимальное значение, надо чтобы x получил максимальное из возможных значений, а y – минимальное из возможных значений. Так как x – это произведение десятичных цифр трехзначного числа, то $x = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$; так как y – это сумма десятичных цифр трехзначного числа, то $y = 1 + 0 + 0 = 1$. Поэтому искомое максимальное значение равно $\frac{7291}{1} = 729$.
Разумеется, ответ неправильный. Предлагаем вам решить следующую, чуть более сложную задачу:

   Для каждого четырехзначного числа $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – цифры от 0 до 9, причем $a \neq 0$) подсчитали значение отношения $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{a+b+c+d}$, а затем отсортировали все четырехзначные числа сначала в порядке возрастания значений этого отношения, а затем (в случае равных значений указанных отношений) – в порядке возрастания самих четырехзначных чисел. Таким образом, например, число 2000 при такой сортировке предшествует числу 1111 (так как $\frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0} < \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1+1+1+1}$), а число 1000 предшествует числу 2000 (так как $\frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{1+0+0+0} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0}$, но $1000 < 2000$).
Какое число находится в полученной последовательности на 8989 месте?

   Artificial intelligence does not yet deal with all tasks «in words». Here is a true story: some artificial intelligence system was asked to find the maximum value of the ratio $\frac{a \cdot b \cdot c}{a+b+c}$, where $\overline{abc}$ is a three-digit number in decimal notation. The system «reasoned» like this:
for the ratio $\frac{x}{y}$ to have a maximum value, x must have the maximum possible value, and y must have the minimum possible value. Since x is the product of decimal digits of a three-digit number, then $x = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$; since y is the sum of decimal digits of a three-digit number, then $y = 1 + 0 + 0 = 1$. Therefore, the required maximum value is $\frac{7291}{1} = 729$.
Of course, the answer is wrong. We ask you to solve slightly more difficult problem:

For each four-digit decimal number $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$) we calculated the value of the ratio $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{a+b+c+d}$, and then sorted all four-digit numbers, first in ascending order of the values of this ratio, and then (in the case of equal values of the ratios) – in ascending order of the four-digit numbers themselves. Thus, for example, the number 2000 after this sorting precedes the number 1111 (since $\frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0} < \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1+1+1+1}$), and the number 1000 precedes the number 2000 (since $\frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{1+0+0+0} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0}$, but $1000 < 2000$).
What number is in the 8989nd place in the resulting sequence?

Answer: 9997

2. Искусственный интеллект справляется еще не со всеми задачами в словах. Вот непридуманная история: некоторой системе искусственного интеллекта было предложено найти максимальное значение отношения $\frac{a \cdot b \cdot c}{a+b+c}$, где $\overline{abc}$ – трехзначное число в десятичной записи. Система «рассудила» так:
чтобы отношение $\frac{x}{y}$ имело максимальное значение, надо чтобы x получил максимальное из возможных значений, а y – минимальное из возможных значений. Так как x – это произведение десятичных цифр трехзначного числа, то $x = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$; так как y – это сумма десятичных цифр трехзначного числа, то $y = 1 + 0 + 0 = 1$. Поэтому искомое максимальное значение равно $\frac{7291}{1} = 729$.
Разумеется, ответ неправильный. Предлагаем вам решить следующую, чуть более сложную задачу:

Для каждого четырехзначного числа $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – цифры от 0 до 9, причем $a \neq 0$) подсчитали значение отношения $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{a+b+c+d}$, а затем отсортировали все четырехзначные числа сначала в порядке возрастания значений этого отношения, а затем (в случае равных значений указанных отношений) – в порядке возрастания самих четырехзначных чисел. Таким образом, например, число 2000 при такой сортировке предшествует числу 1111 (так как $\frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0} < \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1+1+1+1}$), а число 1000 предшествует числу 2000 (так как $\frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{1+0+0+0} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0}$, но $1000 < 2000$).
Какое число находится в полученной последовательности на 8987 месте?

Artificial intelligence does not yet deal with all tasks «in words». Here is a true story: some artificial intelligence system was asked to find the maximum value of the ratio $\frac{a \cdot b \cdot c}{a+b+c}$, where $\overline{abc}$ is a three-digit number in decimal notation. The system «reasoned» like this:
for the ratio $\frac{x}{y}$ to have a maximum value, x must have the maximum possible value, and y must have the minimum possible value. Since x is the product of decimal digits of a three-digit number, then $x = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$; since y is the sum of decimal digits of a three-digit number, then $y = 1 + 0 + 0 = 1$. Therefore, the required maximum value is $\frac{7291}{1} = 729$.
Of course, the answer is wrong. We ask you to solve slightly more difficult problem:

For each four-digit decimal number $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$) we calculated the value of the ratio $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{a+b+c+d}$, and then sorted all four-digit numbers, first in ascending order of the values of this ratio, and then (in the case of equal values of the ratios) – in ascending order of the four-digit numbers themselves. Thus, for example, the number 2000 after this sorting precedes the number 1111 (since $\frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0} < \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1+1+1+1}$), and the number 1000 precedes the number 2000 (since $\frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{1+0+0+0} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0}$, but $1000 < 2000$).
What number is in the 8987rd place in the resulting sequence?

Answer: 9799

3. Искусственный интеллект справляется еще не со всеми задачами в словах. Вот непридуманная история: некоторой системе искусственного интеллекта было предложено найти максимальное значение отношения $\frac{a \cdot b \cdot c}{a+b+c}$, где $\overline{abc}$ – трехзначное число в десятичной записи. Система «рассудила» так:
чтобы отношение $\frac{x}{y}$ имело максимальное значение, надо чтобы x получил максимальное из

возможных значений, а y – минимальное из возможных значений. Так как x – это произведение десятичных цифр трехзначного числа, то $x = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$; так как y – это сумма десятичных цифр трехзначного числа, то $y = 1 + 0 + 0 = 1$. Поэтому искомое максимальное значение равно $\frac{7291}{1} = 729$.

Разумеется, ответ неправильный. Предлагаем вам решить следующую, чуть более сложную задачу:

Для каждого четырехзначного числа $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – цифры от 0 до 9, причем $a \neq 0$) подсчитали значение отношения $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{a+b+c+d}$, а затем отсортировали все четырехзначные числа сначала в порядке возрастания значений этого отношения, а затем (в случае равных значений указанных отношений) – в порядке возрастания самих четырехзначных чисел. Таким образом, например, число 2000 при такой сортировке предшествует числу 1111 (так как $\frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0} < \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1+1+1+1}$), а число 1000 предшествует числу 2000 (так как $\frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{1+0+0+0} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0}$, но $1000 < 2000$).

Какое число находится в полученной последовательности на 8990 месте?

Artificial intelligence does not yet deal with all tasks «in words». Here is a true story: some artificial intelligence system was asked to find the maximum value of the ratio $\frac{a \cdot b \cdot c}{a+b+c}$, where $\overline{abc}$ is a three-digit number in decimal notation. The system «reasoned» like this:

for the ratio $\frac{x}{y}$ to have a maximum value, x must have the maximum possible value, and y must have the minimum possible value. Since x is the product of decimal digits of a three-digit number, then $x = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$; since y is the sum of decimal digits of a three-digit number, then $y = 1 + 0 + 0 = 1$. Therefore, the required maximum value is $\frac{7291}{1} = 729$.

Of course, the answer is wrong. We ask you to solve slightly more difficult problem:

For each four-digit decimal number $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$) we calculated the value of the ratio $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{a+b+c+d}$, and then sorted all four-digit numbers, first in ascending order of the values of this ratio, and then (in the case of equal values of the ratios) – in ascending order of the four-digit numbers themselves. Thus, for example, the number 2000 after this sorting precedes the number 1111 (since $\frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0} < \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1+1+1+1}$), and the number 1000 precedes the number 2000 (since $\frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{1+0+0+0} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0}$, but $1000 < 2000$).

What number is in the 8990th place in the resulting sequence?

Answer: 8899

4. Искусственный интеллект справляется еще не со всеми задачами в словах. Вот непридуманная история: некоторой системе искусственного интеллекта было предложено найти максимальное значение отношения $\frac{a \cdot b \cdot c}{a+b+c}$, где $\overline{abc}$ – трехзначное число в десятичной записи. Система «рассудила» так:

чтобы отношение $\frac{x}{y}$ имело максимальное значение, надо чтобы x получил максимальное из возможных значений, а y – минимальное из возможных значений. Так как x – это произведение десятичных цифр трехзначного числа, то $x = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$; так как y – это сумма десятичных цифр трехзначного числа, то $y = 1 + 0 + 0 = 1$. Поэтому искомое максимальное значение равно $\frac{7291}{1} = 729$.

Разумеется, ответ неправильный. Предлагаем вам решить следующую, чуть более сложную задачу:

Для каждого четырехзначного числа $\overline{abcd}$ (a, b, c, d – цифры от 0 до 9, причем $a \neq 0$) подсчитали значение отношения $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{a+b+c+d}$, а затем отсортировали все четырехзначные числа сначала в порядке возрастания значений этого отношения, а затем (в случае равных значений указанных отношений) – в порядке возрастания самих четырехзначных чисел. Таким образом, например, число 2000 при такой сортировке предшествует числу 1111 (так как $\frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0} < \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1+1+1+1}$), а число 1000 предшествует числу 2000 (так как $\frac{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{1+0+0+0} = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{2+0+0+0}$, но $1000 < 2000$).

Какое число находится в полученной последовательности на 8992 месте?

Artificial intelligence does not yet deal with all tasks «in words». Here is a true story: some artificial intelligence system was asked to find the maximum value of the ratio $\frac{a\cdot b\cdot c}{a+b+c}$, where $\overline{abc}$ is a three-digit number in decimal notation. The system «reasoned» like this:
for the ratio $\frac{x}{y}$ to have a maximum value, x must have the maximum possible value, and y must have the minimum possible value. Since x is the product of decimal digits of a three-digit number, then $x = 9\cdot 9\cdot 9 = 729$; since y is the sum of decimal digits of a three-digit number, then $y = 1+0+0 = 1$. Therefore, the required maximum value is $\frac{7291}{1} = 729$.
Of course, the answer is wrong. We ask you to solve slightly more difficult problem:
For each four-digit decimal number $\overline{abcd}$ ($a \neq 0$) we calculated the value of the ratio $\frac{a\cdot b\cdot c\cdot d}{a+b+c+d}$, and then sorted all four-digit numbers, first in ascending order of the values of this ratio, and then (in the case of equal values of the ratios) – in ascending order of the four-digit numbers themselves. Thus, for example, the number 2000 after this sorting precedes the number 1111 (since $\frac{2\cdot 0\cdot 0\cdot 0}{2+0+0+0} < \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot 1}{1+1+1+1}$), and the number 1000 precedes the number 2000 (since $\frac{1\cdot 0\cdot 0\cdot 0}{1+0+0+0} = \frac{2\cdot 0\cdot 0\cdot 0}{2+0+0+0}$, but $1000 < 2000$).
What number is in the 8992nd place in the resulting sequence?

Answer: 8998

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Сначала докажем, что отношение $\frac{a\cdot b\cdot c\cdot d}{a+b+c+d}$ не убывает при возрастании любой цифры этого числа, не равной 9. Пусть $0 \le t \le 8$ – любая цифра числа $\overline{abcd}$, x, y – соответственно произведение и сумма остальных цифр этого числа.

$$xy \ge 0 \Rightarrow xyt + xt^2 + xt + xy \ge xyt + xt^2 + xt \Rightarrow x(t+1)(t+y) \ge (y+(t+1))xt \Rightarrow$$

$$\frac{x(t+1)}{y+(t+1)} \ge \frac{xt}{y+t},$$

то есть при увеличении t на единицу отношение произведения цифр к их сумме не убывает, что и требовалось доказать.
Следовательно, четырехзначные десятичные числа $\overline{abcd}$, во-первых, упорядочены по сумме цифр. Требуется найти 8989-й член последовательности, в которой 9000 членов (1000, 1001, ..., 9999 – ровно $9999 - 1000 + 1 = 9000$) – иными словами, нужен 12-й член «с конца». Максимальная сумма цифр – 36, и есть только одно четырехзначное число с такой суммой цифр – это 9999, а значит, это и есть последнее число в нашей последовательности. Есть четыре четырехзначных числа с суммой цифр, равной 35 (9998, 9989, 9899 и 8999), они и будут вторым, третьим, четвертым и пятым числами «с конца» в нашей последовательности.
Четырехзначные числа с суммой цифр 34 можно разбить на две группы: те, которые образованы цифрами 9, 9, 8, 8, и те, которые образованы цифрами 9, 9, 9, 7. Числа внутри каждой из этих групп упорядочены по возрастанию, при этом все числа первой группы расположены ближе к концу последовательности, чем числа из второй группы, т.к. $\frac{9\cdot 9\cdot 8\cdot 8}{9+9+8+8} > \frac{9\cdot 9\cdot 9\cdot 7}{9+9+9+7}$. Значит, следующие шесть (именно столькими способами можно составить число из цифр 9,9,8,8) чисел с конца последовательности – это 9988, 9898, 9889, 8998, 8989, 8899; за ними следуют 9997, 9979, 9799, 7999.

Критерии оценивания:

- отмечено неубывание отношения произведения цифр к их сумме – 2 балла;
- доказано неубывание отношения произведения цифр к их сумме, при этом отмечено, что это верно только если все цифры меньше 9 – 1 балл;
- верно выполнен перебор «с конца» последовательности – 2 балла;

- допущена ошибка при переборе, приведшая к неверному ответу – минус 1 балл.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* First, lets prove that the ratio $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{a+b+c+d}$ does not decrease as any digit of this number (that is not equal to 9) increases. Let $0 \leq t \leq 8$ be any digit of the number $\overline{abcd}$, x, y be the product and sum of the remaining digits of this number, respectively.

$$xy \geq 0 \Rightarrow xyt + xt^2 + xt + xy \geq xyt + xt^2 + xt \Rightarrow x(t+1)(t+y) \geq (y + (t+1))xt \Rightarrow$$

$$\frac{x(t+1)}{y+(t+1)} \geq \frac{xt}{y+t},$$

thus when t increases by one, the ratio of the product of digits to their sum does not decrease, which is what was to be proven.
Therefore, four-digit decimal numbers $\overline{abcd}$ are firstly ordered by the sum of their digits. We need to find the 8989th term of a sequence which has 9000 terms (1000, 1001, ..., 9999 - exactly $9999-1000+1 = 9000$) – in other words, we need the 12th term «from the end» . The maximum sum of digits is 36, and there is only one four-digit number with such a sum of digits – it's 9999, which means that this is the last number in our sequence. There are four four-digit numbers with a sum of digits equal to 35 (9998, 9989, 9899 and 8999), and these will be the second, third, fourth and fifth numbers «from the end» in our sequence.
Four-digit numbers with a sum of digits of 34 can be divided into two groups: those formed by the digits 9, 9, 8, 8, and those formed by the digits 9, 9, 9, 7. The numbers within each of these groups are ordered in ascending order, with all the numbers of the first group located closer to the end of the sequence than the numbers from the second group, since $\frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 8}{9+9+8+8} > \frac{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 7}{9+9+9+7}$. By that, the next six (that's how many ways there are to make a number from the digits 9,9,8,8) numbers from the end of the sequence are 9988, 9898, 9889, 8998, 8989, 8899; followed by 9997, 9979, 9799, 7999.

Criteria:

- the ratio of the product of digits to their sum has been noticed to be non-decreasing – 2 points;
- the ratio of the product of digits to their sum has been proven to be non-decreasing, also noticed that its true if all the digits are less than 9 – 1 point;
- correctly searched «from the end» of the sequence – 2 points;
- an error was made during the search, which led to an incorrect answer – minus 1 point.

10-12th degree

Task 1.

1. Дан многочлен $P(x) = -2x^3 + bx^2 + cx + d$, причем $P(2) = 2$, $P(3) = 7$, и $P(x) \geq 3x - 4$ для всех $x < 3$. Вычислите наименьшее возможное значение $P(0)$ и запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Consider a polynomial $P(x) = -2x^3+bx^2+cx+d$ such that $P(2) = 2$, $P(3) = 7$ and $P(x) \geq 3x-4$ for all $x < 3$. Find least possible value of $P(0)$ and write your answer as integer of decimal rounded to hundredth if needed.

   Answer: 28

2. Дан многочлен $P(x) = -0.01x^3+bx^2+cx+d$, причем $P(-1) = -1$, $P(4) = 13$, и $P(x) \geq 2x+1$ для всех $x < 1$. Вычислите наименьшее возможное значение $P(0)$ и запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Consider a polynomial $P(x) = -0.01x^3 + bx^2 + cx + d$ such that $P(-1) = -1$, $P(4) = 13$ and $P(x) \geq 2x + 1$ for all $x < 1$. Find least possible value of $P(0)$ and write your answer as integer of decimal rounded to hundredth if needed.

   Answer: 0.8

3. Дан многочлен $P(x) = -x^3 + bx^2 + cx + d$, причем $P(5) = 3$, $P(4) = -1$, и $P(x) \geq 2x - 7$ для всех $x \in (3; 8)$. Вычислите наименьшее возможное значение $P(0)$ и запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Consider a polynomial $P(x) = -x^3+bx^2+cx+d$ such that $P(5) = 3$, $P(4) = -1$ and $P(x) \geq 2x-7$ for all $x \in (3; 8)$. Find least possible value of $P(0)$ and write your answer as integer of decimal rounded to hundredth if needed.

   Answer: 43

4. Дан многочлен $P(x) = 5x^3 + bx^2 + cx + d$, причем $P(-4) = 5$, $P(-2) = 3$, и $P(x) \geq 4x + 11$ для всех $x > -4$. Вычислите наибольшее возможное значение $P(0)$ и запишите ответ в виде целого числа или десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Consider a polynomial $P(x) = 5x^3 + bx^2 + cx + d$ such that $P(-4) = 5$, $P(-2) = 3$ and $P(x) \geq 4x + 11$ for all $x > -4$. Find largest possible value of $P(0)$ and write your answer as integer of decimal rounded to hundredth if needed.

   Answer: 101

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть $f(x) = 3x - 4$, тогда $f(2) = 2$. Многочлен $Q(x) = P(x) - f(x)$ является кубическим, причем $Q(2) = P(2) - f(2) = 0$ и в то же время $Q(x) \geq 0$ при $x < 3$ – а значит, график $Q(x)$ касается оси абсцисс в точке $(2; 0)$.
Таким образом, многочлен $Q(x)$ можно представить в виде $-2(x - 2)^2(x - t)$, где $t \geq 3$. Также известно, что $P(3) = 7$, откуда $Q(3) = P(3) - f(3) = 7 - 5 = 2$, т.е. $-2(3 - 2)^2(3 - t) = 2$. Получим $t = 4$ и $P(0) = Q(0) + f(0) = -2(0 - 2)^2(0 - 4) + 3 \cdot 0 - 4 = 28$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let $f(x) = 3x - 4$, then $f(2) = 2$. Polynomial $Q(x) = P(x) - f(x)$ is cubic with $Q(2) = P(2) - f(2) = 0$

with $Q(x) \geq 0$ for $x < 3$ – thus, graph $Q(x)$ touches X-axis in the point $(2; 0)$.
Consequently, $Q(x)$ can be expressed as $-2(x-2)^2(x-t)$, while $t \geq 3$. We also know that $P(3) = 7$, thus $Q(3) = P(3) - f(3) = 7 - 5 = 2$, i.e. $-2(3-2)^2(3-t) = 2$. We get $t = 4$ and $P(0) = Q(0) + f(0) = -2(0-2)^2(0-4) + 3 \cdot 0 - 4 = 28$.

Task 2.

1. Дано множество натуральных чисел, не превосходящих 15. Сколькими способами можно выбрать из него подмножество, содержащее хотя бы два простых числа?

   Consider a set of all positive integers less than or equal to 15. How many ways are there to choose its subset which contains at least two prime numbers?

   Answer: 29184

2. Дано множество натуральных чисел, не превосходящих 17. Сколькими способами можно выбрать из него подмножество, содержащее хотя бы два простых числа?

   Consider a set of all positive integers less than or equal to 17. How many ways are there to choose its subset which contains at least two prime numbers?

   Answer: 122880

3. Дано множество натуральных чисел, не превосходящих 13. Сколькими способами можно выбрать из него подмножество, содержащее хотя бы два простых числа?

   Consider a set of all positive integers less than or equal to 17. How many ways are there to choose its subset which contains at least two prime numbers?

   Answer: 7296

4. Дано множество натуральных чисел, не превосходящих 16. Сколькими способами можно выбрать из него подмножество, содержащее хотя бы два простых числа?

   Consider a set of all positive integers less than or equal to 16. How many ways are there to choose its subset which contains at least two prime numbers?

   Answer: 58368

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Есть ровно 2^n способов выбрать подмножество из множества с n элементами – значит, из данного множества (назовем его A) можно выбрать подмножество $2^{15} = 32768$ способами. Множество A содержит шесть простых чисел $(2, 3, 5, 7, 11, 13)$, остальные девять не являются простыми, и составить подмножество только с ними можно $2^9 = 512$ способами. Каждому из указанных подмножеств соответствуют еще шесть, содержащих по одному простому числу – итого $512 + 512 \cdot 6 = 3584$ подмножества, содержащих не более одного простого числа. Остальные подмножества A будут содержать не менее двух простых чисел, и их количество равно $32768 - 3584 = 29184$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* There are 2^n ways to choose subset of a set with n elements, thus there are $2^{15} = 32768$ ways to choose subset from the initial set (lets denote it as A). There are 6 primes $(2, 3, 5, 7, 11, 13)$ in the set, so other 9 numbers are not prime and we can choose $2^9 = 512$ subsets of A using only these 9 non-primes with each of these subsets corresponding to 6 other subsets of A which contain one prime each – thus, we've already counted $512 + 512 \cdot 6 = 3584$ subsets of A with no more than one prime each. Other $32768 - 3584 = 29184$ subsets will contain at least two prime each.

Task 3.

1. Две команды – «Быки» и «Драконы» – играют в волейбол друг против друга, начальный счёт в их матче – 0 : 0, и никакая партия матча не может окончиться вничью. Команда, первой набравшая 2 очка, объявляется победителем матча. Очки начисляются и снимаются по следующим правилам:

   - если у команды 1 очко, то в случае ее поражения в партии это очко снимается;
   - если у команды 0 очков, то в случае ее поражения в партии очко присваивается команде-сопернику.

   С какой вероятностью «Быки» станут победителем матча, если вероятность их победы в каждой отдельной партии равна 0.6? Запишите ответ в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Two teams – «Bulls» and «Dragons» – play volleyball match against each other, the initial score in the match is 0 : 0, and no game of the match can end in a draw. The team that scored 2 points first is declared the winner of the match. Points are awarded and deducted according to the following rules:

   - if a team has 1 point, then if it loses the game, this point is deducted;
   - if a team has 0 points, then if it loses the game, a point is given to the opposing team.

   What is the probability of «Bulls» being the winner of the match, if the probability of their victory in each individual game is 0.6? Write your answer as a decimal, rounding to the nearest hundredth if necessary.

   Answer: 0.69

2. Две команды – «Быки» и «Драконы» – играют в волейбол друг против друга, начальный счёт в их матче – 0 : 0, и никакая партия матча не может окончиться вничью. Команда, первой набравшая 2 очка, объявляется победителем матча. Очки начисляются и снимаются по следующим правилам:

   - если у команды 1 очко, то в случае ее поражения в партии это очко снимается;
   - если у команды 0 очков, то в случае ее поражения в партии очко присваивается команде-сопернику.

   С какой вероятностью «Быки» станут победителем матча, если вероятность их победы в каждой отдельной партии равна 0.2? Запишите ответ в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Two teams – «Bulls» and «Dragons» – play volleyball match against each other, the initial score in the match is 0 : 0, and no game of the match can end in a draw. The team that scored 2 points first is declared the winner of the match. Points are awarded and deducted according to the following rules:

   - if a team has 1 point, then if it loses the game, this point is deducted;
   - if a team has 0 points, then if it loses the game, a point is given to the opposing team.

   What is the probability of «Bulls» being the winner of the match, if the probability of their victory in each individual game is 0.2? Write your answer as a decimal, rounding to the nearest hundredth if necessary.

   Answer: 0.06

3. Две команды – «Быки» и «Драконы» – играют в волейбол друг против друга, начальный счёт в их матче – 0 : 0, и никакая партия матча не может окончиться вничью. Команда, первой набравшая 2 очка, объявляется победителем матча. Очки начисляются и снимаются по следующим правилам:

   - если у команды 1 очко, то в случае ее поражения в партии это очко снимается;
   - если у команды 0 очков, то в случае ее поражения в партии очко присваивается команде-сопернику.

   С какой вероятностью «Быки» станут победителем матча, если вероятность их победы в каждой отдельной партии равна 1/3? Запишите ответ в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Two teams – «Bulls» and «Dragons» – play volleyball match against each other, the initial score in the match is 0 : 0, and no game of the match can end in a draw. The team that scored 2 points first is declared the winner of the match. Points are awarded and deducted according to the following rules:

   - if a team has 1 point, then if it loses the game, this point is deducted;
   - if a team has 0 points, then if it loses the game, a point is given to the opposing team.

   What is the probability of «Bulls» being the winner of the match, if the probability of their victory in each individual game is 1/3? Write your answer as a decimal, rounding to the nearest hundredth if necessary.

   Answer: 0.2

4. Две команды – «Быки» и «Драконы» – играют в волейбол друг против друга, начальный счёт в их матче – 0 : 0, и никакая партия матча не может окончиться вничью. Команда, первой набравшая 2 очка, объявляется победителем матча. Очки начисляются и снимаются по следующим правилам:

   - если у команды 1 очко, то в случае ее поражения в партии это очко снимается;
   - если у команды 0 очков, то в случае ее поражения в партии очко присваивается команде-сопернику.

   С какой вероятностью «Быки» станут победителем матча, если вероятность их победы в каждой отдельной партии равна 0.25? Запишите ответ в виде десятичной дроби, при необходимости округлив ее до сотых.

   Two teams – «Bulls» and «Dragons» – play volleyball match against each other, the initial score in the match is 0 : 0, and no game of the match can end in a draw. The team that scored 2 points first is declared the winner of the match. Points are awarded and deducted according to the following rules:

   - if a team has 1 point, then if it loses the game, this point is deducted;
   - if a team has 0 points, then if it loses the game, a point is given to the opposing team.

   What is the probability of «Bulls» being the winner of the match, if the probability of their victory in each individual game is 0.25? Write your answer as a decimal, rounding to the nearest hundredth if necessary.

   Answer: 0.1

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть вероятность победы «Быков» равна P. Тогда, если первую партию они выигрывают, то вторая партия станет последней в матче (с победой «Быков») с вероятностью $0.6 \cdot 0.6 = 0.36$. Если же первую партию они выигрывают, а вторую проигрывают (это событие наступит с вероятностью $0.6 \cdot 0.4 = 0.24$), то счет матча обнуляется, и «Быки» победят в нем с вероятностью P. Если «Быки» проигрывают первую партию и выигрывают во второй, то снова счет обнуляется. Единственный оставшийся исход первых двух партий – двукратное поражение «Быков» – уже не может привести к их победе в матче.

Итак, вероятность P победы «Быков» в матче складывается из трех вероятностей, соответствующих описанным выше событиям:

$$P = 0.36 + 0.24 \cdot P + 0.24 \cdot P$$

Решая это уравнение, найдем $P = 9/13 \approx 0.69$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let the probability of «Bulls» winning the match be equal to P. Then, if they win the first game, the second one will be the last in the match (with the victory of «Bulls») with probability $0.6 \cdot 0.6 = 0.36$. If they win the first game and lose the second one (this event occurs with probability $0.6 \cdot 0.4 = 0.24$), then the match score is reset to 0:0, and the «Bulls» will win it with probability P. If «Bulls» lose the first game and win the second one, then the score is reset to 0:0, too. The only remaining outcome of the first two games (i.e. two defeats for the «Bulls») can no longer lead to their victory in the match.

So, the probability of «Bulls» winning the match is the sum of three probabilities corresponding to the events described above:

$$P = 0.36 + 0.24 \cdot P + 0.24 \cdot P$$

Solving this equation, we get $P = 9/13 \approx 0.69$.

Task 4.

1. Дан клетчатый прямоугольник 68×2023, разбитый на клетки 1×1, и проведена его диагональ. Определите количество клеток, через которые проходит эта диагональ.

   Given a rectangle 68×2023, divided into 1×1 cells, with its diagonal drawn. Determine the number of cells the diagonal passes through.

   Answer: 2074

2. Дан клетчатый прямоугольник 96×552, разбитый на клетки 1×1, и проведена его диагональ. Определите количество клеток, через которые проходит эта диагональ.

   Given a rectangle 96×552, divided into 1×1 cells, with its diagonal drawn. Determine the number of cells the diagonal passes through.

   Answer: 624

3. Дан клетчатый прямоугольник 2023×1309, разбитый на клетки 1×1, и проведена его диагональ. Определите количество клеток, через которые проходит эта диагональ.

   Given a rectangle 2023×1309, divided into 1×1 cells, with its diagonal drawn. Determine the number of cells the diagonal passes through.

   Answer: 3213

4. Дан клетчатый прямоугольник 415×166, разбитый на клетки 1×1, и проведена его диагональ. Определите количество клеток, через которые проходит эта диагональ.

   Given a rectangle 415×166, divided into 1×1 cells, with its diagonal drawn. Determine the number of cells the diagonal passes through.

   Answer: 498

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Для начала докажем, что для взаимно простых m, n в клетчатом прямоугольнике $m \times n$ диагональ проходит через $m + n - 1$ клеток. Действительно, поскольку m и n взаимно просты, диагональ не пройдет через вершины клеток (за исключением своих концов), а значит, каждое пересечение стороны клетки означает переход в следующую клетку. В прямоугольнике $m \times n$ диагональ пересечет $(m - 1)$ прямую, параллельную одной из сторон прямоугольника (и содержащую стороны единичных клеток), и $(n - 1)$ прямую, параллельную другой стороне прямоугольника – таким образом, диагональ пересечет $(m-1)+(n-1)+1 = m+n-1$ клеток, что и требовалось доказать.

Очевидно, если НОД$(m, n) = d > 1$, то диагональ пройдет через $d - 1$ вершин клеток (за исключением своих концов), и d равных отрезков, на которые она будет разбита этими вершинами, являются диагоналями прямоугольников $\frac{m}{d} \times \frac{n}{d}$, где НОД$(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$. Значит, в каждом таком прямоугольнике диагональ пройдет через $\frac{m}{d} + \frac{n}{d} - 1$ клеток, а всего таких прямоугольников – d штук, т.е. общее количество клеток, через которые пройдет диагональ, равно $d \cdot (\frac{m}{d} + \frac{n}{d} - 1) = m + n - d$. Используя эту формулу для $m = 68$, $n = 2023$ (тогда $d = 17$), получим 2074.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* First, lets prove that for coprime m, n in a checkered rectangle $m \times n$ the diagonal passes through $m + n - 1$ cells. Indeed, since m and n are relatively prime, the diagonal will not pass through the vertices of the cells (except for its ends), which means that each intersection of the side of the cell means a transition to the next cell. In a rectangle $m \times n$ the diagonal will intersect an $(m - 1)$ line parallel to one of the sides of the rectangle (and containing the sides of unit cells) and a $(n - 1)$ line parallel to the other side of the rectangle, thus, the diagonal will cross $(m - 1) + (n - 1) + 1 = m + n - 1$ cells, which is what needed to be proven.

Obviously, if GCD$(m, n) = d > 1$, then the diagonal will pass through $d - 1$ vertices of the cells (except for its ends), and d equal segments (into which it will be divided by these vertices) are diagonals of rectangles $\frac{m}{d} \times \frac{n}{d}$, where GCD$(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$. By that, in each such rectangle the diagonal will pass through $\frac{m}{d} + \frac{n}{d} - 1$ cells, and there are d such rectangles in total, i.e. the total number of cells the diagonal will pass through is equal to $d \cdot (\frac{m}{d} + \frac{n}{d} - 1) = m + n - d$. Using this formula for $m = 68$, $n = 2023$ (then $d = 17$), we get 2074.

Task 5.

1. В треугольной комнате с углами A, B, C установлена непрозрачная перегородка CO (от пола до потолка) так, что из угла B видна ровно половина стены AC, а из угла A – ровно треть стены BC. Игорь хочет установить в комнате умную колонку «VK Капсула» с Марусей так, чтобы любая прямая, параллельная полу комнаты и проходящая через колонку, пересекала либо перегородку CO, либо стену AB. Стены комнаты и перегородка перпендикулярны полу и имеют форму прямоугольников, колонку можно считать точечным объектом.
   Какая часть площади комнаты подходит Игорю для установки колонки?

   In a triangular room with corners A, B, C, a new opaque wall CO (from the floor to the ceiling) is installed in such way that exactly half of the wall AC is visible from the corner B, and exactly a third of the BC wall is visible from the corner A. Igor wants to install a smart speaker «VK Capsule» with Marusya in the room so that any straight line parallel to the floor of the room and passing through the speaker will intersect either the wall CO or the wall AB. The walls of the

room are perpendicular to the floor and have the shape of rectangles; the smart speaker can be considered a point object.
What part of the room area is suitable for installing the speaker in the way Igor wants?

Answer: $\frac{5}{12}$

2. В треугольной комнате с углами A, B, C установлена непрозрачная перегородка CO (от пола до потолка) так, что из угла B видна ровно половина стены AC, а из угла A – ровно четверть стены BC. Игорь хочет установить в комнате умную колонку «VK Капсула» с Марусей так, чтобы любая прямая, параллельная полу комнаты и проходящая через колонку, пересекала либо перегородку CO, либо стену AB. Стены комнаты и перегородка перпендикулярны полу и имеют форму прямоугольников, колонку можно считать точечным объектом.
Какая часть площади комнаты подходит Игорю для установки колонки?

   In a triangular room with corners A, B, C, a new opaque wall CO (from the floor to the ceiling) is installed in such way that exactly half of the wall AC is visible from the corner B, and exactly a quarter of the BC wall is visible from the corner A. Igor wants to install a smart speaker «VK Capsule» with Marusya in the room so that any straight line parallel to the floor of the room and passing through the speaker will intersect either the wall CO or the wall AB. The walls of the room are perpendicular to the floor and have the shape of rectangles; the smart speaker can be considered a point object.
What part of the room area is suitable for installing the speaker in the way Igor wants?

   Answer: $\frac{9}{20}$

3. В треугольной комнате с углами A, B, C установлена непрозрачная перегородка CO (от пола до потолка) так, что из угла B видна ровно треть стены AC, а из угла A – ровно четверть стены BC. Игорь хочет установить в комнате умную колонку «VK Капсула» с Марусей так, чтобы любая прямая, параллельная полу комнаты и проходящая через колонку, пересекала либо перегородку CO, либо стену AB. Стены комнаты и перегородка перпендикулярны полу и имеют форму прямоугольников, колонку можно считать точечным объектом.
Какая часть площади комнаты подходит Игорю для установки колонки?

   In a triangular room with corners A, B, C, a new opaque wall CO (from the floor to the ceiling) is installed in such way that exactly a third of the wall AC is visible from the corner B, and exactly a quarter of the BC wall is visible from the corner A. Igor wants to install a smart speaker «VK Capsule» with Marusya in the room so that any straight line parallel to the floor of the room and passing through the speaker will intersect either the wall CO or the wall AB. The walls of the room are perpendicular to the floor and have the shape of rectangles; the smart speaker can be considered a point object.
What part of the room area is suitable for installing the speaker in the way Igor wants?

   Answer: $\frac{7}{12}$

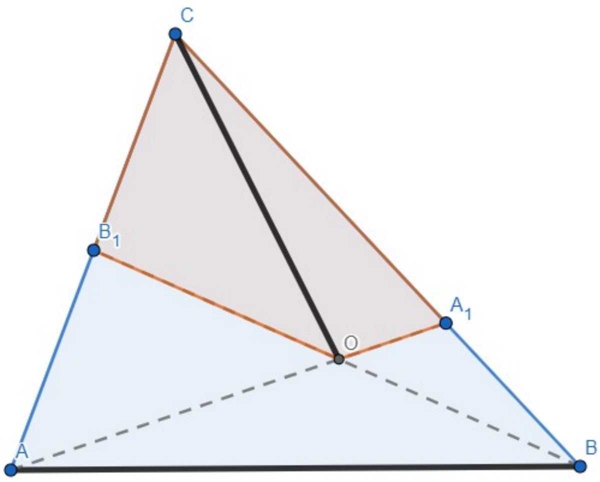
4. В треугольной комнате с углами A, B, C установлена непрозрачная перегородка CO (от пола до потолка) так, что из угла B видна ровно треть стены AC, а из угла A – ровно одна пятая часть стены BC. Игорь хочет установить в комнате умную колонку «VK Капсула» с Марусей так, чтобы любая прямая, параллельная полу комнаты и проходящая через колонку, пересекала либо перегородку CO, либо стену AB. Стены комнаты и перегородка перпендикулярны полу и имеют форму прямоугольников, колонку можно считать точечным объектом.
Какая часть площади комнаты подходит Игорю для установки колонки?

   In a triangular room with corners A, B, C, a new opaque wall CO (from the floor to the ceiling) is installed in such way that exactly a third of the wall AC is visible from the corner B, and exactly a fifth of the BC wall is visible from the corner A. Igor wants to install a smart speaker «VK Capsule» with Marusya in the room so that any straight line parallel to the floor of the room and

passing through the speaker will intersect either the wall CO or the wall AB. The walls of the room are perpendicular to the floor and have the shape of rectangles; the smart speaker can be considered a point object.
What part of the room area is suitable for installing the speaker in the way Igor wants?

Answer: $\frac{64}{105}$

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Рассмотрим вид сверху: стены комнаты станут сторонами треугольника, а перегородка – отрезком, соединяющим его вершину с одной из внутренних точек. Тогда задачу можно переформулировать следующим образом: найти площадь геометрического места внутренних точек (ГМТ) P треугольника ABC, таких, что любая прямая, проходящая через P, пересекает либо AB, либо CO. Пусть прямые AO, BO пересекают стороны BC, AB треугольника в точках A_1, B_1, соответственно.



Докажем, что искомым ГМТ является четырехугольник CA_1OB_1. Рассмотрим произвольную внутреннюю точку этого четырехугольника; без ограничения общности будем считать ее внутренней точкой треугольника CB_1O. Проведем через P некоторую прямую l и предположим, что она не пересекает CO. Из этого следует, что она пересекает отрезки OB_1, CB_1. Пусть l пересекает B_1C в точке T. Тогда луч TP является внутренним для угла B_1TO, причем луч TO пересекает сторону AB исходного треугольника – а значит, луч TP также пересекает ее. Итак, любая внутренняя точка четырехугольника CA_1OB_1 входит в искомое ГМТ.
Теперь рассмотрим точки вне упомянутого четырехугольника и покажем, что они не обладают требуемым для искомого ГМТ свойством. Для внешних точек треугольника ABC это совсем очевидно (подлходит, например, прямая, проходящая через данную внешнюю точку параллельно одной из сторон $\triangle ABC$), для внутренних точек треугольника AOB – тоже (достаточно провести через данную точку прямую, параллельную AB). Остались два треугольника – AOB_1 и BOA_1. Рассмотрим первый из них (второй рассматривается аналогично). Итак, пусть P – внутренняя точка $\triangle AOB_1$. Проведем прямую PK, где K – произвольная точка отрезка BO, отличная от его концов: такая прямая не пересечет ни CO, ни AB.
Утверждение доказано.

Итак, требуется найти $\frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ABC}}$, причем $\frac{AB_1}{AC} = \frac{1}{2}$, $\frac{BA_1}{BC} = \frac{1}{3}$ по условию. Согласно теореме Менелая, $\frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{A_1B}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, откуда $\frac{AO}{OA_1} = 3 \Rightarrow \frac{AO}{AA_1} = \frac{3}{4}$. Далее

$$\frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ACA_1}} \cdot \frac{S_{ACA_1}}{S_{ABC}} = (1 - \frac{S_{AOB_1}}{S_{ACA_1}}) \cdot \frac{CA_1}{CB} =$$

$$(1 - \frac{AO}{AA_1} \cdot \frac{AB_1}{AC}) \cdot \frac{CA_1}{CB} = (1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2})\frac{2}{3} = \frac{5}{12}$$

Критерии оценивания:

- участник правильно понял условие, правильно определил соотношение отрезков на сторонах треугольника – 1 балл;
- определено искомое ГМТ (четырехугольник CA_1OB_1) – 1 балл;
- доказано, что четырехугольник CA_1OB_1 и есть искомое ГМТ – 1 балл;
- верно вычислено искомое отношение – 2 балла;
- допущена арифметическая ошибка, приведшая к неверному ответу – минус 1 балл.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let's look from the top to the room: its walls AB, BC, CA will become the sides of the triangle, and the wall CO will become a segment connecting its vertex with one of the internal points. Then the problem can be reformulated as follows: find the area of the locus of the interior points P of the triangle ABC, such that any line passing through P intersects either AB or CO. Let the lines AO, BO intersect the sides BC, AB of the triangle at points A_1, B_1, respectively.

Let us prove that the required locus is the quadrilateral CA_1OB_1. Consider an arbitrary internal point of the quadrilateral; without loss of generality, we will consider it an internal point of the triangle CB_1O. Lets draw some line l through P and assume that it does not intersect CO. Then it intersects the segments OB_1, CB_1. Let l intersect B_1C at point T. Then the ray TP is internal to the angle B_1TO, and the ray TO intersects the side AB of the original triangle – and therefore the ray TP also intersects it. So, any internal point of the quadrilateral CA_1OB_1 is included in the desired locus.
Now let's consider points outside the mentioned quadrilateral and show that they do not have the property required for the desired locus. For external points of triangle ABC this is quite obvious (for example, a straight line passing through a given external point parallel to one of the sides of $\triangle ABC$ is suitable), for internal points of triangle AOB its obvious, too (it is enough to draw a straight line through this point parallel to AB). There are two triangles left – AOB_1 and BOA_1. Let's consider the first of them (the second one is considered similarly). So, let P be the internal point of $\triangle AOB_1$. Lets draw a line PK, where K is an arbitrary point of the segment BO that is different from its ends: such a line will not intersect either CO or AB.
Q.E.D.

So, we need to calculate $\frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ABC}}$ with $\frac{AB_1}{AC} = \frac{1}{2}$, $\frac{BA_1}{BC} = \frac{1}{3}$. Using Menelaus's theorem, we get $\frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{A_1B}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, thus $\frac{AO}{OA_1} = 3 \Rightarrow \frac{AO}{AA_1} = \frac{3}{4}$. Finally,

$$\frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CA_1OB_1}}{S_{ACA_1}} \cdot \frac{S_{ACA_1}}{S_{ABC}} = (1 - \frac{S_{AOB_1}}{S_{ACA_1}}) \cdot \frac{CA_1}{CB} =$$

$$(1 - \frac{AO}{AA_1} \cdot \frac{AB_1}{AC}) \cdot \frac{CA_1}{CB} = (1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2})\frac{2}{3} = \frac{5}{12}$$

Criteria:

- the participant correctly understood the task's formulation, correctly determined the ratio of the segments on the sides of the triangle – 1 point;
- the quadrilateral CA_1OB_1 is considered to be the required locus – 1 point;
- it is proved that the quadrilateral CA_1OB_1 is the required locus – 1 point;
- the required ratio is correctly calculated – 2 points;
- an arithmetic error was made, which led to an incorrect answer – minus 1 point.

Task 6.

1. Есть точные чашечные весы (чашки вмещают любой объем), гирька весом в n грамм (n – натуральное число), мешок сахарного песка и совочек. Дополнительных ёмкостей нет, в чашке две кучки сахара сразу смешиваются. Найдите все n, для которых существует алгоритм, позволяющий отмерить m грамм сахара для любого натурального m. Определите минимальное число взвешиваний для $n = 1$, $m = 2023$.

   There are weighing scale (its cups can hold any volume), an n gram weight, a bag of granulated sugar and a scoop. There are no additional containers; in a cup, two piles of sugar are immediately mixed. Find all positive integers n such that we can obtain an m grams of sugar for an arbitrary positive integer m. Determine the minimum number of weighings required for $n = 1$, $m = 2023$.

   Answer: 11

2. Есть точные чашечные весы (чашки вмещают любой объем), гирька весом в n грамм (n – натуральное число), мешок сахарного песка и совочек. Дополнительных ёмкостей нет, в чашке две кучки сахара сразу смешиваются. Найдите все n, для которых существует алгоритм, позволяющий отмерить m грамм сахара для любого натурального m. Определите минимальное число взвешиваний для $n = 2$, $m = 2024$.

   There are weighing scale (its cups can hold any volume), an n gram weight, a bag of granulated sugar and a scoop. There are no additional containers; in a cup, two piles of sugar are immediately mixed. Find all positive integers n such that we can obtain an m grams of sugar for an arbitrary positive integer m. Determine the minimum number of weighings required for $n = 2$, $m = 2024$.

   Answer: 10

3. Есть точные чашечные весы (чашки вмещают любой объем), гирька весом в n грамм (n – натуральное число), мешок сахарного песка и совочек. Дополнительных ёмкостей нет, в чашке две кучки сахара сразу смешиваются. Найдите все n, для которых существует алгоритм, позволяющий отмерить m грамм сахара для любого натурального m. Определите минимальное число взвешиваний для $n = 1$, $m = 199$.

   There are weighing scale (its cups can hold any volume), an n gram weight, a bag of granulated sugar and a scoop. There are no additional containers; in a cup, two piles of sugar are immediately mixed. Find all positive integers n such that we can obtain an m grams of sugar for an arbitrary positive integer m. Determine the minimum number of weighings required for $n = 1$, $m = 199$.

   Answer: 8

4. Есть точные чашечные весы (чашки вмещают любой объем), гирька весом в n грамм (n – натуральное число), мешок сахарного песка и совочек. Дополнительных ёмкостей нет, в чашке две кучки сахара сразу смешиваются. Найдите все n, для которых существует алгоритм, позволяющий отмерить m грамм сахара для любого натурального m. Определите минимальное число взвешиваний для $n = 2$, $m = 198$.

   There are weighing scale (its cups can hold any volume), an n gram weight, a bag of granulated sugar and a scoop. There are no additional containers; in a cup, two piles of sugar are immediately mixed. Find all positive integers n such that we can obtain an m grams of sugar for an arbitrary positive integer m. Determine the minimum number of weighings required for $n = 2$, $m = 198$.

   Answer: 7

Solution (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть k – количество грамм сахара на одной из чаш весов. За одно взвешивание мы можем удвоить k (положив на другую чашу весов столько же сахара, уравновесив чаши) или разделить k пополам (разделив имеющуюся кучку на две равные по весу). Имея дополнительно гирю массой n грамм, мы можем за одно взвешивание получить $k+n$ или $k-n$ грамм. Сочетая описанные действия, можно за одно взвешивание получить $2k+n$ или $2k-n$ грамм.

Докажем индукцией по m, что с помощью гири весом в $n=2^t$ грамм (для любого целого $t \geq 0$) можно взвесить m грамм для любого натурального m.
База индукции ($m=1$):

$$2^t \to 2^{t-1} \to \cdots \to 2^0 = 1$$

Пусть мы можем взвесить k грамм сахара. Тогда построим следующую последовательность операций для получения $k+1$ грамм сахара:

$$k \to 2k \to 2^2k \to \cdots \to 2^tk \to 2^tk + 2^t \to 2^{t-1}k + 2^{t-1} \to \cdots \to k+1$$

(потребовалось $2t+1$ взвешиваний)
Доказано.

Теперь докажем, что для прочих n (не равных 2^t ни для какого целого неотрицательного t) невозможно получить 1 грамм сахара. Действительно, пусть n кратно некоторому простому $p \neq 2$, тогда и умножение на 2, и деление на 2, и прибавление n оставляет взвешиваемое количество грамм сахара кратным p, в то время как 1, очевидно, не кратно p.

$$2023 = 2 \cdot 1011 + 1 = 2 \cdot (2 \cdot 505 + 1) + 1 = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 252 + 1) + 1) + 1 = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 126 + 1) + 1) + 1 = \cdots$$

$$\cdots = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1) + 1) + 1) + 1$$

– здесь количество умножений на 2 равно количеству взвешиваний, т.е. 11 взвешиваний хватит:

$$0 \to 1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 127 \to 253 \to 506 \to 1012 \to 2023$$

Покажем, что 10 взвешиваний всегда недостаточно. Для этого сначала заметим, что в условиях задачи, имея гирю в n грамм и кучку в k грамм сахара, за одно взвешивание мы можем получить не более $2k+n$ грамм сахара. Тогда наибольший возможный вес, который можно отмерить за 10 взвешиваний, равен

$$0 \to 1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 127 \to 255 \to 511 \to 1023$$

грамма.

Критерии оценивания:

- приведена идея, что $n = 2^t$ – 1 балл;
- доказано, что при $n \neq 2^t$ условие не выполняется – 2 балла;
- приведена верная оценка количества взвешиваний – 1 балл;
- приведен пример с нужным количеством взвешиваний – 1 балл;
- допущены незначительные ошибки, не повлиявшие на ход рассуждений – минус 1 балл.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let k be the number of grams of sugar on one of the cups. During one weighing we can double k (putting the same amount of sugar on the other cup of the scale, balancing the cups) or divide k in half (dividing the existing cup into two equally weighting ones). Having an additional weight of n grams, we can obtain $k+n$ or $k-n$ grams in one weighing. By combining the described actions we can obtain $2k+n$ or

$2k - n$ grams in one weighing.

Lets prove by induction on m, that we can obtain m grams (for any positive integer m) using additional weight of $n = 2^t$ grams for any non-negative integer t.
Base of induction ($m = 1$):

$$2^t \to 2^{t-1} \to \cdots \to 2^0 = 1$$

Consider we succeeded to obtain k grams of sugar. Then we can use the following sequence of weighings to obtain $k+1$ grams of sugar:

$$k \to 2k \to 2^2k \to \cdots \to 2^tk \to 2^tk + 2^t \to 2^{t-1}k + 2^{t-1} \to \cdots \to k+1$$

(total of $2t+1$ weighings)
Q.E.D.

Now lets prove that for other n (not equal to 2^t for any non-negative integer t) it is impossible to obtain 1 grams of sugar. Indeed, let n be a multiple of some prime $p \neq 2$, then multiplying by 2, or dividing by 2, or adding n leaves the weighed amount of grams a multiple of p, while 1 is obviously not a multiple of p.

$$2023 = 2\cdot 1011+1 = 2\cdot(2\cdot 505+1)+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 252+1)+1)+1 = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 2\cdot 126+1)+1)+1 = \cdots$$

$$\cdots = 2\cdot(2\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1 - 1)+1)+1)+1$$

– here the number of multiplications by 2 is equal to the number of weightings, thus 11 of them is enough to obtain 2023 grams of sugar:

$$0 \to 1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 127 \to 253 \to 506 \to 1012 \to 2023$$

Lets prove that 10 weighings are never enough for it. To do that, first note that while having a weight of n grams and a pile of k grams of sugar, we can obtain at most $2k+n$ grams of sugar with one weighing. Then the largest possible weight that can be obtained with 10 weighings is

$$0 \to 1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 127 \to 255 \to 511 \to 1023$$

grams.

Criteria:

- the idea is given that $n = 2^t$ – 1 point;
- it is proven that for $n \neq 2^t$ the conditions are not satisfied – 2 points;
- shown the correct estimate of the number of weighings – 1 point;
- an example is given with the required number of weighings – 1 point;
- minor errors were made that did not affect the course of reasoning – minus 1 point.