Система оценивания / Task score

1. Первичная оценка решения каждой задачи выставляется по 5-балльной шкале.

   Если к задаче нужен только краткий ответ, то по ней выставляется либо 0 первичных баллов, либо 5.

2. Для каждой задачи вычисляется средний балл (M) по результатам ее решения всеми участниками.

3. Весовой коэффициент (K) каждой задачи вычисляется по формуле

$$K = 3 - 0.5 \cdot M$$

4. Балл каждого участника за каждую задачу умножается на весовой коэффициент этой задачи.

5. Баллы, набранные участником, суммируются с последующим округлением до ближайшего целого в бóльшую сторону.

1. Pre-score of the solution to each task is set on a 5-point scale.

   If the task requires short answer then pre-score will be 0 or 5 points.

2. An average score (M) is calculated based on the results of all participants for each task.

3. The weighting coefficient (K) of each task is calculated using formula

$$K = 3 - 0.5 \cdot M$$

4. Each participant's score for each task is multiplied by the weighting coefficient of that task.

5. The points scored by the participant are summed and then rounded up to the nearest integer.

7-8^{th} degree

Task 1.

1. Спасшийся после кораблекрушения купец, попав в ближайший порт, ждет денежной помощи от друзей. У него осталась лишь одна драгоценность – золотая цепь на шее, и хозяин гостиницы за стол и кров берет по одному звену цепочки в день (в n-й день у хозяина должно быть ровно n звеньев, кусочки цепи можно получать обратно в виде сдачи). Цепь – произведение ювелирного искусства, поэтому купец хочет распилить как можно меньше звеньев, но он не знает, когда получит помощь от друзей.

   Какое наименьшее число звеньев цепи придется распилить, если длина цепи – 100 звеньев, и купцу придется ждать не более 30 дней?

   A merchant who has survived a shipwreck and arrived at the nearest port is waiting for financial help from his friends. He has only one piece of jewelry left – a gold chain around his neck, and the innkeeper takes one link of the chain a day for living (on the nth day the innkeeper must have exactly n links, and links of the chain can be returned as change). The chain is a work of jewelry art, so the merchant wants to saw off as few links as possible, but he does not know when he will receive help from his friends.

   What is the smallest number of links of the chain that will have to be sawed off if the total length of the chain is 100 links, and the merchant will have to wait for no more than 30 days?

   Answer: 5

2. Спасшийся после кораблекрушения купец, попав в ближайший порт, ждет денежной помощи от друзей. У него осталась лишь одна драгоценность – золотая цепь на шее, и хозяин гостиницы за стол и кров берет по одному звену цепочки в день (в n-й день у хозяина должно быть ровно n звеньев, кусочки цепи можно получать обратно в виде сдачи). Цепь – произведение ювелирного искусства, поэтому купец хочет распилить как можно меньше звеньев, но он не знает, когда получит помощь от друзей.

   Какое наименьшее число звеньев цепи придется распилить, если длина цепи – 100 звеньев, и купцу придется ждать не более 20 дней?

   A merchant who has survived a shipwreck and arrived at the nearest port is waiting for financial help from his friends. He has only one piece of jewelry left – a gold chain around his neck, and the innkeeper takes one link of the chain a day for living (on the nth day the innkeeper must have exactly n links, and links of the chain can be returned as change). The chain is a work of jewelry art, so the merchant wants to saw off as few links as possible, but he does not know when he will receive help from his friends.

   What is the smallest number of links of the chain that will have to be sawed off if the total length of the chain is 100 links, and the merchant will have to wait for no more than 20 days?

   Answer: 4

3. Спасшийся после кораблекрушения купец, попав в ближайший порт, ждет денежной помощи от друзей. У него осталась лишь одна драгоценность – золотая цепь на шее, и хозяин гостиницы за стол и кров берет по одному звену цепочки в день (в n-й день у хозяина должно

быть ровно n звеньев, кусочки цепи можно получать обратно в виде сдачи). Цепь – произведение ювелирного искусства, поэтому купец хочет распилить как можно меньше звеньев, но он не знает, когда получит помощь от друзей.

Какое наименьшее число звеньев цепи придется распилить, если длина цепи – 100 звеньев, и купцу придется ждать не более 40 дней?

A merchant who has survived a shipwreck and arrived at the nearest port is waiting for financial help from his friends. He has only one piece of jewelry left – a gold chain around his neck, and the innkeeper takes one link of the chain a day for living (on the nth day the innkeeper must have exactly n links, and links of the chain can be returned as change). The chain is a work of jewelry art, so the merchant wants to saw off as few links as possible, but he does not know when he will receive help from his friends.

What is the smallest number of links of the chain that will have to be sawed off if the total length of the chain is 100 links, and the merchant will have to wait for no more than 40 days?

Answer: 5

4. Спасшийся после кораблекрушения купец, попав в ближайший порт, ждет денежной помощи от друзей. У него осталась лишь одна драгоценность – золотая цепь на шее, и хозяин гостиницы за стол и кров берет по одному звену цепочки в день (в n-й день у хозяина должно быть ровно n звеньев, кусочки цепи можно получать обратно в виде сдачи). Цепь – произведение ювелирного искусства, поэтому купец хочет распилить как можно меньше звеньев, но он не знает, когда получит помощь от друзей.

   Какое наименьшее число звеньев цепи придется распилить, если длина цепи – 100 звеньев, и купцу придется ждать не более 25 дней?

   A merchant who has survived a shipwreck and arrived at the nearest port is waiting for financial help from his friends. He has only one piece of jewelry left – a gold chain around his neck, and the innkeeper takes one link of the chain a day for living (on the nth day the innkeeper must have exactly n links, and links of the chain can be returned as change). The chain is a work of jewelry art, so the merchant wants to saw off as few links as possible, but he does not know when he will receive help from his friends.

   What is the smallest number of links of the chain that will have to be sawed off if the total length of the chain is 100 links, and the merchant will have to wait for no more than 25 days?

Answer: 4

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* После первого распила у нас 1 (распиленное) звено и остальная (разомкнутая) цепочка. Если в первый день купец не получил денег, ему нужно распилить ещё одно звено. Но где? Если распилить крайнее звено, оплатить можно лишь второй день. Можно оставить с краю два звена, а третье распилить. Тогда будем иметь три кусочка длиной 1, 2 и 97, и второй день можно оплатить двумя способами: 1+1 или 2 (получив 1 сдачей), а всего кусочков хватит для оплаты 4 дней. Но выгоднее распилить четвёртое от края звено: 1, 3, 1 – в этом случае двух распилов хватит для оплаты 5 дней. Далее, рассуждая так же, делаем третий распил, оставляя от края кусочек в 7 звеньев: 5 дней подряд уже оплачено, 6-й оплатим всеми предыдущими + третьим распиленным звеном, и так далее.

В случае цепи длиной 100 звеньев и необходимости прожить в гостинице до 30 дней имеем следующие 4 последовательных распила и получившиеся кусочки (где «;» – разделитель распилов): 1; 3,1; 7,1; 15,1 после чего останется кусок длиной в 71 звено. Получившихся после 4-го распила кусков хватит лишь на 29 дней, и поэтому придется сделать еще один, 5-й распил (любой).

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* After the first cut, we have 1 (sawn) link and the remaining (open) chain. If the merchant did not receive money on the first day, he needs to saw another link. But where? If you saw the outermost link, you can only pay for the second day. You can leave two links at the edge and saw the third. Then we will have three pieces 1, 2 and 97 long, and the second day can be paid in two ways: 1 + 1 or 2 (receiving 1 in change), and in total there will be enough pieces to pay for 4 days. But it is more profitable to saw the fourth link from the edge: 1, 3, 1 – in this case, two cuts will be enough to pay for 5 days. Then, reasoning in the same way, we make a third cut, leaving a piece of 7 links from the edge: 5 days in a row have already been paid, the 6th will be paid with all the previous ones + the third sawn link, and so on.

In the case of a chain 100 links long and the need to stay in a hotel for up to 30 days, we have the following 4 consecutive cuts and the resulting pieces (where «;» is the cut separator): 1; 3,1; 7,1; 15,1 after which a piece 71 links long will remain. The pieces obtained after the 4th cut will be enough for only 29 days, and therefore one more, 5th cut (any) will have to be made.

Task 2.

1. Рассмотрим рекурсивную функцию:

   $$F(n) = \begin{cases} n-5, & \text{если } n > 2024 \\ F(F(n+6)), & \text{если } n \leqslant 2024 \end{cases}$$

   Сколько корней в натуральных (положительных целых) числах имеет уравнение $F(n) = 2020$? Если оно не имеет корней, либо корней бесконечно много, то введите 0 в поле для ответа.

   Consider the recursive function:

   $$F(n) = \begin{cases} n-5, & \text{if } n > 2024 \\ F(F(n+6)), & \text{if } n \leqslant 2024 \end{cases}$$

   How many roots (in positive integers) does the equation $F(n) = 2020$ have? If it has no roots, or there are infinitely many roots, then enter 0 as your answer.

   Answer: 2025

2. Рассмотрим рекурсивную функцию:

   $$F(n) = \begin{cases} n-5, & \text{если } n > 2025 \\ F(F(n+6)), & \text{если } n \leqslant 2025 \end{cases}$$

   Сколько корней в натуральных (положительных целых) числах имеет уравнение $F(n) = 2020$? Если оно не имеет корней, либо корней бесконечно много, то введите 0 в поле для ответа.

Consider the recursive function:

$$F(n) = \begin{cases} n-5, & \text{if } n > 2025 \\ F(F(n+6)), & \text{if } n \leqslant 2025 \end{cases}$$

How many roots (in positive integers) does the equation $F(n) = 2020$ have? If it has no roots, or there are infinitely many roots, then enter 0 as your answer.

Answer: 2026

3. Рассмотрим рекурсивную функцию:

$$F(n) = \begin{cases} n-5, & \text{если } n > 2024 \\ F(F(n+6)), & \text{если } n \leqslant 2024 \end{cases}$$

Найдите сумму всех положительных целых корней уравнения $F(n) = 2025$. Если оно не имеет корней, либо корней бесконечно много, то введите 0 в поле для ответа.

Consider the recursive function:

$$F(n) = \begin{cases} n-5, & \text{if } n > 2024 \\ F(F(n+6)), & \text{if } n \leqslant 2024 \end{cases}$$

Find the sum of all positive integer roots of the equation $F(n) = 2025$. If it has no roots, or there are infinitely many roots, then enter 0 as your answer.

Answer: 2030

4. Рассмотрим рекурсивную функцию:

$$F(n) = \begin{cases} n-5, & \text{если } n > 2024 \\ F(F(n+6)), & \text{если } n \leqslant 2024 \end{cases}$$

Найдите сумму всех положительных целых корней уравнения $F(n) = 2024$. Если оно не имеет корней, либо корней бесконечно много, то введите 0 в поле для ответа.

Consider the recursive function:

$$F(n) = \begin{cases} n-5, & \text{if } n > 2024 \\ F(F(n+6)), & \text{if } n \leqslant 2024 \end{cases}$$

Find the sum of alll positive integer roots of the equation $F(n) = 2024$. If it has no roots, or there are infinitely many roots, then enter 0 as your answer.

Answer: 2029

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Для любого $n \geq 2025$ очевидно без всякой рекурсии, что $F(n) = n - 5$. Вычислим $F(n)$ для нескольких $n \leq 2024$:
$F(2024) = F(F(2030)) = F(2025) = 2020$
$F(2023) = F(F(2029)) = F(2024) = 2020$

$F(2022) = F(F(2038)) = F(2023) = 2020$
$F(2021) = F(F(2027)) = F(2022) = 2020$
$F(2020) = F(F(2026)) = F(2021) = 2020$

Докажем индукцией по k следующее утверждение: $F(2024-k) = F(2023-k) = F(2022-k) = F(2021-k) = F(2020-k) = 2020$ любого $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 2019\}$. База индукции уже доказана в примерах выше.

Пусть для некоторого $k > 0$ выполнено $F(2024-k) = F(2023-k) = F(2022-k) = F(2021-k) = F(2020-k) = 2020$. Тогда имеем:
$F(2024-(k+1)) = F(2023-k) = 2020$ по предположению индукции;
$F(2023-(k+1)) = F(2022-k) = 2020$ по предположению индукции;
$F(2022-(k+1)) = F(2021-k) = 2020$ по предположению индукции;
$F(2021-(k+1)) = F(2020-k) = 2020$ по предположению индукции;
$F(2020-(k+1)) = F(2019-k) = F(F(2019-k+6) = F(F(2025-k)) = F(F(2024-(k-1))) = F(2020) = 2020.$
Таким образом, утверждение доказано.

Итак, $F(n) = 2020$ для всех натуральных $n \leq 2025$ – таких ровно 2025.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)*
For any $n \geq 2025$ it is obvious without any recursion that $F(n) = n-5$. Lets calculate $F(n)$ for several $n \leq 2024$:
$F(2024) = F(F(2030)) = F(2025) = 2020$
$F(2023) = F(F(2029)) = F(2024) = 2020$
$F(2022) = F(F(2038)) = F(2023) = 2020$
$F(2021) = F(F(2027)) = F(2022) = 2020$
$F(2020) = F(F(2026)) = F(2021) = 2020$

Lets prove the following statement by induction on k: $F(2024-k) = F(2023-k) = F(2022-k) = F(2021-k) = F(2020-k) = 2020$ for any $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 2019\}$. The induction base has already been proved in the examples above.

Let $F(2024-k) = F(2023-k) = F(2022-k) = F(2021-k) = F(2020-k) = 2020$ be satisfied for some $k > 0$. Then we have:
$F(2024-(k+1)) = F(2023-k) = 2020$ by induction hypothesis;
$F(2023-(k+1)) = F(2022-k) = 2020$ by induction hypothesis;
$F(2022-(k+1)) = F(2021-k) = 2020$ by induction hypothesis;
$F(2021-(k+1)) = F(2020-k) = 2020$ by induction hypothesis;
$F(2020-(k+1)) = F(2019-k) = F(F(2019-k+6) = F(F(2025-k)) = F(F(2024-(k-1))) = F(2020) = 2020.$
By that, the statement is proven.

So, $F(n) = 2020$ for all positive integers $n \leq 2025$ – there are exactly 2025 of them.

Task 3.

1. Известно, что есть ровно 2^{2024} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее нечётное число элементов. Чему равно количество элементов множества A?

   There are exactly 2^{2024} ways to select from a finite set A a subset containing an odd number of elements. What is the number of elements in the set A?

   Answer: 2025

2. Известно, что есть ровно 2^{2024} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее чётное (возможное, нулевое) число элементов. Чему равно количество элементов множества A?

   There are exactly 2^{2024} ways to select from a finite set A a subset containing an even (possibly, zero) number of elements. What is the number of elements in the set A?

   Answer: 2025

3. Известно, что есть ровно 2^{101} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее нечётное число элементов. Чему равно количество элементов множества A?

   There are exactly 2^{101} ways to select from a finite set A a subset containing an odd number of elements. What is the number of elements in the set A?

   Answer: 102

4. Известно, что есть ровно 2^{101} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее чётное (возможное, нулевое) число элементов. Чему равно количество элементов множества A?

   There are exactly 2^{101} ways to select from a finite set A a subset containing an even (possibly, zero) number of elements. What is the number of elements in the set A?

   Answer: 102

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Зафиксируем некоторый элемент x множества A. Теперь разобьем все его подмножества на пары, отличающиеся только наличием (либо отсутствием) элемента x. Очевидно, в каждой паре одно подмножество содержит чётное (возможно, нулевое) число элементов, а другое – нечётное число элементов. Таким образом, «чётных» подмножеств столько же, сколько и «нечётных» – значит, если множество A содержит n элементов и, как следствие, 2^n подмножеств (включая пустое), то количество «нечётных» подмножеств равно $2^n : 2 = 2^{n-1}$. По условию это количество равно 2^{2024}, откуда $n = 2025$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Lets fix some element x of the set A. Now we divide all its subsets into pairs that differ only in the presence (or absence) of element x. Obviously, in each pair one subset contains an even (possibly zero) number of elements, and the other – an odd number of elements. Thus, there are as many «even» subsets as «odd» ones – by that, if set A contains n elements and (as a consequence) 2^n subsets (including the empty one), then the number of «odd» subsets is $2^n : 2 = 2^{n-1}$. By the task's condition, the number is 2^{2024}, thus $n = 2025$.

Task 4.

1. Софья отметила на координатной прямой все точки $a, a+3, a+6, a+9, \ldots$, начиная с некоторого $a < 0$; Света отметила на той же прямой точки $b, b-5, b-10, b-15, \ldots$, начиная с некоторого $b > 100$. Найдите наименьшее возможное количество отмеченных точек на отрезке $[0; 100]$.

   Sofia marked on the coordinate line all points $a, a+3, a+6, a+9, \ldots$, starting from some $a < 0$; Sveta marked on the same line points $b, b-5, b-10, b-15, \ldots$, starting from some $b > 100$. Find the smallest possible number of marked points on the segment $[0; 100]$.

   Answer: 46

2. Софья отметила на координатной прямой все точки $a, a+3, a+6, a+9, \ldots$, начиная с некоторого $a < 0$; Света отметила на той же прямой точки $b, b-5, b-10, b-15, \ldots$, начиная с некоторого $b > 200$. Найдите наименьшее возможное количество отмеченных точек на отрезке $[0; 200]$.

   Sofia marked on the coordinate line all points $a, a+3, a+6, a+9, \ldots$, starting from some $a < 0$; Sveta marked on the same line points $b, b-5, b-10, b-15, \ldots$, starting from some $b > 200$. Find the smallest possible number of marked points on the segment $[0; 200]$.

   Answer: 92

3. Софья отметила на координатной прямой все точки $a, a+3, a+6, a+9, \ldots$, начиная с некоторого $a < 0$; Света отметила на той же прямой точки $b, b-5, b-10, b-15, \ldots$, начиная с некоторого $b > 50$. Найдите наименьшее возможное количество отмеченных точек на отрезке $[0; 50]$.

   Sofia marked on the coordinate line all points $a, a+3, a+6, a+9, \ldots$, starting from some $a < 0$; Sveta marked on the same line points $b, b-5, b-10, b-15, \ldots$, starting from some $b > 50$. Find the smallest possible number of marked points on the segment $[0; 50]$.

   Answer: 22

4. Софья отметила на координатной прямой все точки $a, a+3, a+6, a+9, \ldots$, начиная с некоторого $a < 0$; Света отметила на той же прямой точки $b, b-5, b-10, b-15, \ldots$, начиная с некоторого $b > 150$. Найдите наименьшее возможное количество отмеченных точек на отрезке $[0; 150]$.

   Sofia marked on the coordinate line all points $a, a+3, a+6, a+9, \ldots$, starting from some $a < 0$; Sveta marked on the same line points $b, b-5, b-10, b-15, \ldots$, starting from some $b > 150$. Find the smallest possible number of marked points on the segment $[0; 150]$.

   Answer: 70

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)*
Чтобы было как можно меньше отмеченных точек, как можно бо́льшее их число должно совпасть.

Ясно, что каждая пятая точка Софьи может совпасть с каждой третьей точкой Светы – это значит, что на каждом полуинтервале $[x; x+15)$ может быть не менее 7 отмечанных точек:

$$x = y,\ x+3,\ y+5,\ x+6,\ x+9,\ y+10,\ x+12,$$

где точки $x+3k$ отмечала Софья, $y+5t$ отмечала Света ($k, t \in \{0, 1, 2, \ldots\}$).

Исходный отрезок имеет длину 100, поэтому в нем умещается 6 упомянутых полуинтервалов, т.е. отмеченных точек на отрезке $[0; 100]$ будет не менее $7 \cdot 6 = 42$:

$$x,\ x+3,\ x+5, \ldots,\ x+5\cdot 15+12$$

Остаются полуинтервал $[0; x)$ и отрезок $[x+90; 100]$ с суммарной длиной 10. Легко проверить, что в них не менее 4 отмеченных точек (например, для $x = 2$) – таким образом, общее количество отмеченных точек не может быть меньше $42 + 4 = 46$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* In order to have as few marked points as possible, as many of them as possible must coincide. It is clear that every fifth point marked by Sofia can coincide with every third point marked by Sveta – by that, on each half-interval $[x; x+15)$ there will be at least 7 marked points:

$$x = y,\ x+3,\ y+5,\ x+6,\ x+9,\ y+10,\ x+12,$$

where points $x+3k$ were marked by Sofia, and $y+5t$ were marked by Sveta ($k, t \in \{0, 1, 2, \ldots\}$).

The original segment has a length of 100, so it can accommodate 6 of the mentioned half-intervals, i.e. there will be at least $7 \cdot 6 = 42$ marked points on the segment $[0; 100]$:

$$x,\ x+3,\ x+5, \ldots,\ x+5\cdot 15+12$$

There remains the half-interval $[0; x)$ and the segment $[x+90; 100]$ with a total length of 10. It is easy to check that they contain at least 4 marked points (for example, for $x = 2$) – thus, the total number of marked points cannot be less than $42 + 4 = 46$.

Task 5. Стёпа купил 11 пирожных и решил поделиться ими с Петей – для этого Стёпа может разрезать одно из пирожных на две части. Всегда ли Стёпа может добиться того, чтобы ему и Пете достались по 6 пирожных (целых или нет) равной совокупной массы, если изначально все 11 пирожных имели разные массы? Обоснуйте свой ответ.

Stephen bought 11 cakes and decided to share them with Peter – to do so, he can cut one of the cakes into two parts. Can Stephen ensure that both he and Peter will get 6 cakes (uncut or not) of equal total mass, if initially all 11 cakes had different masses? Explain your answer.

Решение (RUS). Да, может. Упорядочим пирожные по возрастанию их масс: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{11}$. Ясно, что

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 < a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} < a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} < a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}$$

Значит, самое большое (11-е) пирожное всегда можно разрезать на такие две части x, y ($x+y = a_{11}$), что $x + a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = y + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$.

Критерии оценивания:

- указано, что надо разрезать самое большое пирожное – 1 первичный балл;
- помимо разрезания 11-го пирожного, указано, как распределить первые 10 пирожных – 2 первичных балла;

- кроме вышеописанного, показано, что разница масс между четными и нечетными пирожными меньше массы 11-го пирожного – 3 первичных балла;
- верное решение, но с мелкими недочетами – 4 первичных балла;
- полностью верное решение – 5 первичных баллов.

Solution (ENG). Yes, he can. Lets arrange the cakes in ascending order of their masses: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{11}$. It is clear that

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 < a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} < a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} < a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}$$

By that, the largest (11th) cake can always be cut into two parts x, y $(x + y = a_{11})$ such that $x + a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = y + a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$.

Criteria:

- it is shown that the largest cake should be cut – 1 pre-point;
- in addition to cutting the 11th cake, it is shown how to distribute the first 10 cakes – 2 pre-points;
- in addition, it is shown that the difference in mass between the even and odd cakes is less than the mass of the 11th cake – 3 pre-points;
- correct solution, but with minor flaws – 4 pre-points;
- completely correct solution – 5 pre-points.

Task 6. Мишень имеет форму правильного 30-угольника (все его стороны и все его углы – равны), вершины которого пронумерованы по часовой стрелке: $1, 2, 3, \ldots, 30$ – Змей Горыныч мысленно построил треугольник, вершинами которого являются три из этих точек, и сказал Ивану Царевичу: «Если пошлешь свою стрелу внутрь загаданного мной треугольника (но не на сторону треугольника!), то отпущу тебя с миром, а если нет – съем».

Змей Горыныч не знал, что Иван Царевич – очень меткий стрелок из лука: всегда попадает в ту точку мишени, в которую целится. Какое наименьшее количество выстрелов ему потребуется, чтобы гарантировать себе свободу?

The target is in the shape of a regular 30-gon (all its sides and all its angles are equal), the vertices of which are numbered clockwise: $1, 2, 3, \ldots, 30$ – The Dragon mentally constructed a triangle whose vertices are three of these points, and said to Ivan: «If you send your arrow inside the triangle I have in mind (but not on its side!), I will let you go in peace, and if not, I will eat you.»

The Dragon did not know that Ivan is a very accurate archer: he always hits the point of the target which he aims at. What is the least number of shots that he needs to guarantee his freedom?

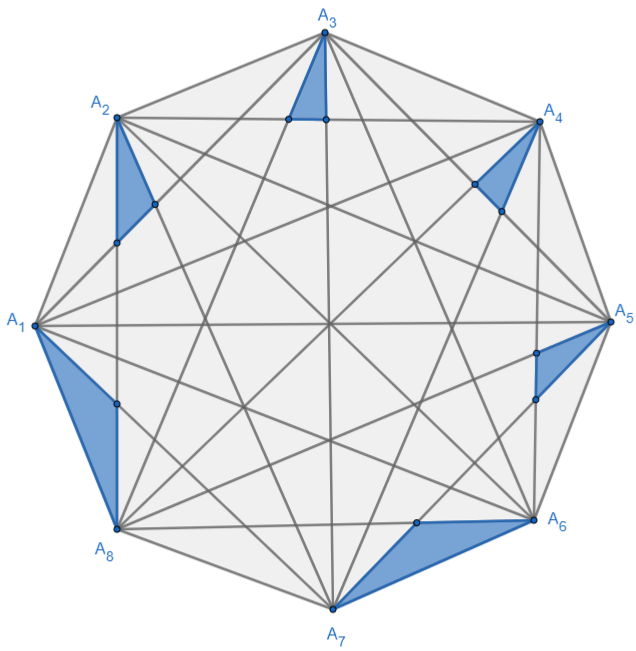
Answer: 28

Критерии оценивания:

- оценка приведена без объяснений – 1 первичный балл;
- приведена оценка с неполным доказательством – 3 первичных балла;
- оценка обоснована, но пример не приведен либо некорректен – 4 первичных балла;
- приведена и обоснована оценка, приведен корректный пример – 5 первичных баллов.

Решение (RUS). Диагонали, выходящие из вершины выпуклого (в частности, правильного) n-угольника, делят его на $n-2$ треугольника, поэтому $n-3$ выстрелов Ивану может не хватить. Покажем, что $n-2$ выстрелов будет достаточно (в нашем случае $n=30$): на рисунке показано соответствующее расположение треугольников (в каждый из которых Ивану достаточно выстрелить по одному разу) для 8-угольника. Внутри каждого треугольника с вершинами в вершинах исходного правильного многоугольника всегда содержится треугольник, окрашенный в синий цвет.

Итак, Ивану будет достаточно сделать 28 выстрелов, но меньшим числом обойтись нельзя: тогда спасение не будет гарантировано.



Solution (ENG). The diagonals going out of the vertex of a convex (in particular, regular) n-gon divide it into $n-2$ triangles, so $n-3$ shots may not be enough for Ivan. Lets show that $n-2$ shots will be enough (in our case $n=30$): the picture shows the corresponding arrangement of triangles (Ivan only needs to shoot once at each) for an 8-gon. Inside each triangle with vertices at the vertices of the original regular polygon there is always a triangle painted blue.

So, it will be enough for Ivan to make 28 shots, but he cannot get by with a smaller number: then salvation will not be guaranteed.

Criteria:

- the estimation is given without explanation – 1 pre-point;
- the estimation is given with incomplete proof – 3 pre-points;
- the estimation is proven, but the example is not given or is incorrect – 4 pre-points;
- the estimation is proven, a correct example is given – 5 pre-points.

9^{th} degree

Task 1.

1. Спасшийся после кораблекрушения купец, попав в ближайший порт, ждет денежной помощи от друзей. У него осталась лишь одна драгоценность – золотая цепь на шее, и хозяин гостиницы за стол и кров берет по одному звену цепочки в день (в n-й день у хозяина должно быть ровно n звеньев, кусочки цепи можно получать обратно в виде сдачи). Цепь – произведение ювелирного искусства, поэтому купец хочет распилить как можно меньше звеньев, чтобы дождаться помощи от друзей, которая поступит не более чем через 100 дней.

   Какое наименьшее число звеньев цепи придется распилить, чтобы гарантированно дождаться помощи? Считайте, что длина цепи – более 1000 звеньев.

   A merchant who has survived a shipwreck and arrived at the nearest port is waiting for financial help from his friends. He has only one piece of jewelry left - a gold chain around his neck, and the innkeeper takes one link of the chain a day for board and lodging (on the nth day the innkeeper must have exactly n links, and links of the chain can be returned as change). The chain is a work of jewelry art, so the merchant wants to saw off as few links as possible in order to wait for help from his friends, which will arrive in no more than 100 days.

   What is the smallest number of links of the chain that must be sawed to be guaranteed to wait for help? Consider that the length of the chain is more than 1000 links.

   Answer: 6

2. Спасшийся после кораблекрушения купец, попав в ближайший порт, ждет денежной помощи от друзей. У него осталась лишь одна драгоценность – золотая цепь на шее, и хозяин гостиницы за стол и кров берет по одному звену цепочки в день (в n-й день у хозяина должно быть ровно n звеньев, кусочки цепи можно получать обратно в виде сдачи). Цепь – произведение ювелирного искусства, поэтому купец хочет распилить как можно меньше звеньев, чтобы дождаться помощи от друзей, которая поступит не более чем через 60 дней.

   Какое наименьшее число звеньев цепи придется распилить, чтобы гарантированно дождаться помощи? Считайте, что длина цепи – более 1000 звеньев.

   A merchant who has survived a shipwreck and arrived at the nearest port is waiting for financial help from his friends. He has only one piece of jewelry left - a gold chain around his neck, and the innkeeper takes one link of the chain a day for board and lodging (on the nth day the innkeeper must have exactly n links, and links of the chain can be returned as change). The chain is a work of jewelry art, so the merchant wants to saw off as few links as possible in order to wait for help from his friends, which will arrive in no more than 60 days.

   What is the smallest number of links of the chain that must be sawed to be guaranteed to wait for help? Consider that the length of the chain is more than 1000 links.

   Answer: 5

3. Спасшийся после кораблекрушения купец, попав в ближайший порт, ждет денежной помощи от друзей. У него осталась лишь одна драгоценность – золотая цепь на шее, и хозяин гостиницы за стол и кров берет по одному звену цепочки в день (в n-й день у хозяина должно

быть ровно n звеньев, кусочки цепи можно получать обратно в виде сдачи). Цепь – произведение ювелирного искусства, поэтому купец хочет распилить как можно меньше звеньев, чтобы дождаться помощи от друзей, которая поступит не более чем через 200 дней.

Какое наименьшее число звеньев цепи придется распилить, чтобы гарантированно дождаться помощи? Считайте, что длина цепи – более 1000 звеньев.

A merchant who has survived a shipwreck and arrived at the nearest port is waiting for financial help from his friends. He has only one piece of jewelry left - a gold chain around his neck, and the innkeeper takes one link of the chain a day for board and lodging (on the nth day the innkeeper must have exactly n links, and links of the chain can be returned as change). The chain is a work of jewelry art, so the merchant wants to saw off as few links as possible in order to wait for help from his friends, which will arrive in no more than 200 days.

What is the smallest number of links of the chain that must be sawed to be guaranteed to wait for help? Consider that the length of the chain is more than 1000 links.

Answer: 7

4. Спасшийся после кораблекрушения купец, попав в ближайший порт, ждет денежной помощи от друзей. У него осталась лишь одна драгоценность – золотая цепь на шее, и хозяин гостиницы за стол и кров берет по одному звену цепочки в день (в n-й день у хозяина должно быть ровно n звеньев, кусочки цепи можно получать обратно в виде сдачи). Цепь – произведение ювелирного искусства, поэтому купец хочет распилить как можно меньше звеньев, чтобы дождаться помощи от друзей, которая поступит не более чем через 300 дней.

   Какое наименьшее число звеньев цепи придется распилить, чтобы гарантированно дождаться помощи? Считайте, что длина цепи – более 1000 звеньев.

   A merchant who has survived a shipwreck and arrived at the nearest port is waiting for financial help from his friends. He has only one piece of jewelry left - a gold chain around his neck, and the innkeeper takes one link of the chain a day for board and lodging (on the nth day the innkeeper must have exactly n links, and links of the chain can be returned as change). The chain is a work of jewelry art, so the merchant wants to saw off as few links as possible in order to wait for help from his friends, which will arrive in no more than 300 days.

   What is the smallest number of links of the chain that must be sawed to be guaranteed to wait for help? Consider that the length of the chain is more than 1000 links.

Answer: 8

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* После первого распила у нас 1 (распиленное) звено и остальная (разомкнутая) цепочка. Если в первый день купец не получил денег, ему нужно распилить ещё одно звено. Но где? Если распилить крайнее звено, оплатить можно лишь второй день. Можно оставить с краю два звена, а третье распилить. Тогда будем иметь три кусочка длиной 1, 2 и 97, и второй день можно оплатить двумя способами: 1+1 или 2 (получив 1 сдачей), а всего кусочков хватит для оплаты 4 дней. Но выгоднее распилить четвёртое от края звено: 1, 3, 1 – в этом случае двух распилов хватит для оплаты 5 дней. Далее, рассуждая так же, делаем третий распил, оставляя от края кусочек в 7 звеньев: 5 дней подряд уже оплачено, 6-й оплатим всеми предыдущими + третьим распиленным звеном, и так далее.

В случае цепи длиной 1000 звеньев и необходимости прожить в гостинице до 100 дней имеем следующие 5 последовательных распилов и получившиеся кусочки (где «;» – разделитель распилов): 1; 3,1; 7,1; 15,1; 31,1, после чего останется кусок длиной не менее 939 звеньев – значит, необходим 6-й распил. Итак, придется сделать 6 распилов.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* After the first cut, we have 1 (sawn) link and the remaining (open) chain. If the merchant did not receive money on the first day, he needs to saw another link. But where? If you saw the outermost link, you can only pay for the second day. You can leave two links at the edge and saw the third. Then we will have three pieces 1, 2 and 97 long, and the second day can be paid in two ways: 1 + 1 or 2 (receiving 1 in change), and in total there will be enough pieces to pay for 4 days. But it is more profitable to saw the fourth link from the edge: 1, 3, 1 – in this case, two cuts will be enough to pay for 5 days. Then, reasoning in the same way, we make a third cut, leaving a piece of 7 links from the edge: 5 days in a row have already been paid, the 6th will be paid with all the previous ones + the third sawn link, and so on.

In the case of a chain 1000 links long and the need to stay in a hotel for up to 100 days, we have the following 5 consecutive cuts and the resulting pieces (where «;» is the cut separator): 1; 3,1; 7,1; 15,1; 31,1, after which there will be a piece no less than 939 links long which means a 6th cut is needed. So, the merchant will have to make 6 cuts.

Task 2.

1. Рассмотрим рекурсивную функцию:

$$F(n) = \begin{cases} n-5, & \text{если } n > 2024 \\ F(F(n+6)), & \text{если } n \leqslant 2024 \end{cases}$$

Сколько корней в натуральных (положительных целых) числах имеет уравнение $F(n) = 2020$? Если оно не имеет корней, либо корней бесконечно много, то введите 0 в поле для ответа.

Consider the recursive function:

$$F(n) = \begin{cases} n-5, & \text{if } n > 2024 \\ F(F(n+6)), & \text{if } n \leqslant 2024 \end{cases}$$

How many roots (in positive integers) does the equation $F(n) = 2020$ have? If it has no roots, or there are infinitely many roots, then enter 0 as your answer.

Answer: 2025

2. Рассмотрим рекурсивную функцию:

$$F(n) = \begin{cases} n-5, & \text{если } n > 2025 \\ F(F(n+6)), & \text{если } n \leqslant 2025 \end{cases}$$

Сколько корней в натуральных (положительных целых) числах имеет уравнение $F(n) = 2020$? Если оно не имеет корней, либо корней бесконечно много, то введите 0 в поле для ответа.

Consider the recursive function:

$$F(n) = \begin{cases} n-5, & \text{if } n > 2025 \\ F(F(n+6)), & \text{if } n \leqslant 2025 \end{cases}$$

How many roots (in positive integers) does the equation $F(n) = 2020$ have? If it has no roots, or there are infinitely many roots, then enter 0 as your answer.

Answer: 2026

3. Рассмотрим рекурсивную функцию:

$$F(n) = \begin{cases} n-5, & \text{если } n > 2024 \\ F(F(n+6)), & \text{если } n \leqslant 2024 \end{cases}$$

Найдите сумму всех положительных целых корней уравнения $F(n) = 2025$. Если оно не имеет корней, либо корней бесконечно много, то введите 0 в поле для ответа.

Consider the recursive function:

$$F(n) = \begin{cases} n-5, & \text{if } n > 2024 \\ F(F(n+6)), & \text{if } n \leqslant 2024 \end{cases}$$

Find the sum of all positive integer roots of the equation $F(n) = 2025$. If it has no roots, or there are infinitely many roots, then enter 0 as your answer.

Answer: 2030

4. Рассмотрим рекурсивную функцию:

$$F(n) = \begin{cases} n-5, & \text{если } n > 2024 \\ F(F(n+6)), & \text{если } n \leqslant 2024 \end{cases}$$

Найдите сумму всех положительных целых корней уравнения $F(n) = 2024$. Если оно не имеет корней, либо корней бесконечно много, то введите 0 в поле для ответа.

Consider the recursive function:

$$F(n) = \begin{cases} n-5, & \text{if } n > 2024 \\ F(F(n+6)), & \text{if } n \leqslant 2024 \end{cases}$$

Find the sum of alll positive integer roots of the equation $F(n) = 2024$. If it has no roots, or there are infinitely many roots, then enter 0 as your answer.

Answer: 2029

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Для любого $n \geq 2025$ очевидно без всякой рекурсии, что $F(n) = n - 5$. Вычислим $F(n)$ для нескольких $n \leq 2024$:

$F(2024) = F(F(2030)) = F(2025) = 2020$

$F(2023) = F(F(2029)) = F(2024) = 2020$

$F(2022) = F(F(2038)) = F(2023) = 2020$
$F(2021) = F(F(2027)) = F(2022) = 2020$
$F(2020) = F(F(2026)) = F(2021) = 2020$

Докажем индукцией по k следующее утверждение: $F(2024-k) = F(2023-k) = F(2022-k) = F(2021-k) = F(2020-k) = 2020$ любого $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2019\}$. База индукции уже доказана в примерах выше.

Пусть для некоторого $k > 0$ выполнено $F(2024-k) = F(2023-k) = F(2022-k) = F(2021-k) = F(2020-k) = 2020$. Тогда имеем:
$F(2024-(k+1)) = F(2023-k) = 2020$ по предположению индукции;
$F(2023-(k+1)) = F(2022-k) = 2020$ по предположению индукции;
$F(2022-(k+1)) = F(2021-k) = 2020$ по предположению индукции;
$F(2021-(k+1)) = F(2020-k) = 2020$ по предположению индукции;
$F(2020-(k+1)) = F(2019-k) = F(F(2019-k+6) = F(F(2025-k)) = F(F(2024-(k-1))) = F(2020) = 2020$.
Таким образом, утверждение доказано.

Итак, $F(n) = 2020$ для всех натуральных $n \leq 2025$ – таких ровно 2025.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)*
For any $n \geq 2025$ it is obvious without any recursion that $F(n) = n-5$. Lets calculate $F(n)$ for several $n \leq 2024$:
$F(2024) = F(F(2030)) = F(2025) = 2020$
$F(2023) = F(F(2029)) = F(2024) = 2020$
$F(2022) = F(F(2038)) = F(2023) = 2020$
$F(2021) = F(F(2027)) = F(2022) = 2020$
$F(2020) = F(F(2026)) = F(2021) = 2020$

Lets prove the following statement by induction on k: $F(2024-k) = F(2023-k) = F(2022-k) = F(2021-k) = F(2020-k) = 2020$ for any $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2019\}$. The induction base has already been proved in the examples above.

Let $F(2024-k) = F(2023-k) = F(2022-k) = F(2021-k) = F(2020-k) = 2020$ be satisfied for some $k > 0$. Then we have:
$F(2024-(k+1)) = F(2023-k) = 2020$ by induction hypothesis;
$F(2023-(k+1)) = F(2022-k) = 2020$ by induction hypothesis;
$F(2022-(k+1)) = F(2021-k) = 2020$ by induction hypothesis;
$F(2021-(k+1)) = F(2020-k) = 2020$ by induction hypothesis;
$F(2020-(k+1)) = F(2019-k) = F(F(2019-k+6) = F(F(2025-k)) = F(F(2024-(k-1))) = F(2020) = 2020$.
By that, the statement is proven.

So, $F(n) = 2020$ for all positive integers $n \leq 2025$ – there are exactly 2025 of them.

Task 3.

1. Известно, что есть ровно 2^{2024} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее нечётное число элементов. Чему равно количество элементов множества A?

   There are exactly 2^{2024} ways to select from a finite set A a subset containing an odd number of elements. What is the number of elements in the set A?

   Answer: 2025

2. Известно, что есть ровно 2^{2024} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее чётное (возможное, нулевое) число элементов. Чему равно количество элементов множества A?

   There are exactly 2^{2024} ways to select from a finite set A a subset containing an even (possibly, zero) number of elements. What is the number of elements in the set A?

   Answer: 2025

3. Известно, что есть ровно 2^{101} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее нечётное число элементов. Чему равно количество элементов множества A?

   There are exactly 2^{101} ways to select from a finite set A a subset containing an odd number of elements. What is the number of elements in the set A?

   Answer: 102

4. Известно, что есть ровно 2^{101} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее чётное (возможное, нулевое) число элементов. Чему равно количество элементов множества A?

   There are exactly 2^{101} ways to select from a finite set A a subset containing an even (possibly, zero) number of elements. What is the number of elements in the set A?

   Answer: 102

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Зафиксируем некоторый элемент x множества A. Теперь разобьем все его подмножества на пары, отличающиеся только наличием (либо отсутствием) элемента x. Очевидно, в каждой паре одно подмножество содержит чётное (возможно, нулевое) число элементов, а другое – нечётное число элементов. Таким образом, «чётных» подмножеств столько же, сколько и «нечётных» – значит, если множество A содержит n элементов и, как следствие, 2^n подмножеств (включая пустое), то количество «нечётных» подмножеств равно $2^n : 2 = 2^{n-1}$. По условию это количество равно 2^{2024}, откуда $n = 2025$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Lets fix some element x of the set A. Now we divide all its subsets into pairs that differ only in the presence (or absence) of element x. Obviously, in each pair one subset contains an even (possibly zero) number of elements, and the other – an odd number of elements. Thus, there are as many «even» subsets as «odd» ones – by that, if set A contains n elements and (as a consequence) 2^n subsets (including the empty one), then the number of «odd» subsets is $2^n : 2 = 2^{n-1}$. By the task's condition, the number is 2^{2024}, thus $n = 2025$.

Task 4.

1. Некоторая бесконечная последовательность натуральных чисел обладает следующим свойством: для любого целого положительного n среднее арифметическое первых $n+1$ членов этой последовательности отличается от среднего арифметического ее первых n членов на одно и то же целое положительное число. Также известно, что некоторый член этой последовательности равен сумме всех предыдущих членов.

   Сколько существует различных последовательностей, удовлетворяющих описанным выше условиям и содержащих число 2024?

   Some infinite sequence of positive integers has the following property: for any n, the arithmetic mean of the first $n+1$ terms of this sequence differs from the arithmetic mean of its first n terms by the same positive integer. It is also known that some term of this sequence is equal to the sum of all previous terms.

   How many different sequences are there that satisfy the conditions described above and contain the number 2024?

   Answer: 12

2. Некоторая бесконечная последовательность натуральных чисел обладает следующим свойством: для любого целого положительного n среднее арифметическое первых $n+1$ членов этой последовательности отличается от среднего арифметического ее первых n членов на одно и то же целое положительное число. Также известно, что некоторый член этой последовательности равен сумме всех предыдущих членов.

   Сколько существует различных последовательностей, удовлетворяющих описанным выше условиям и содержащих число 2025?

   Some infinite sequence of positive integers has the following property: for any n, the arithmetic mean of the first $n+1$ terms of this sequence differs from the arithmetic mean of its first n terms by the same positive integer. It is also known that some term of this sequence is equal to the sum of all previous terms.

   How many different sequences are there that satisfy the conditions described above and contain the number 2025?

   Answer: 0

3. Некоторая бесконечная последовательность натуральных чисел обладает следующим свойством: для любого целого положительного n среднее арифметическое первых $n+1$ членов этой последовательности отличается от среднего арифметического ее первых n членов на одно и то же целое положительное число. Также известно, что некоторый член этой последовательности равен сумме всех предыдущих членов.

   Сколько существует различных последовательностей, удовлетворяющих описанным выше условиям и содержащих число 100?

   Some infinite sequence of positive integers has the following property: for any n, the arithmetic mean of the first $n+1$ terms of this sequence differs from the arithmetic mean of its first n terms by the same positive integer. It is also known that some term of this sequence is equal to the sum of all previous terms.

How many different sequences are there that satisfy the conditions described above and contain the number 100?

Answer: 6

4. Некоторая бесконечная последовательность натуральных чисел обладает следующим свойством: для любого целого положительного n среднее арифметическое первых $n+1$ членов этой последовательности отличается от среднего арифметического ее первых n членов на одно и то же целое положительное число. Также известно, что некоторый член этой последовательности равен сумме всех предыдущих членов.

   Сколько существует различных последовательностей, удовлетворяющих описанным выше условиям и содержащих число 99?

   Some infinite sequence of positive integers has the following property: for any n, the arithmetic mean of the first $n+1$ terms of this sequence differs from the arithmetic mean of its first n terms by the same positive integer. It is also known that some term of this sequence is equal to the sum of all previous terms.

   How many different sequences are there that satisfy the conditions described above and contain the number 99?

Answer: 0

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – произвольная (фиксированная) последовательность, обладающая свойствами, описанных в условиях задачи; для упрощения обозначений обозначим первый элемент этой последовательности a (то есть $a_1 = a$). Для любого натурального n обозначим S_n сумму первых n членов последовательности; в частности, $S_1 = a_1 = a$.

По условию задачи, для любого натурального n имеем $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n}$ – это некоторая положительная целая константа, обозначим ее через d; следовательно, $\frac{S_1}{1}, \frac{S_2}{2}, \frac{S_3}{3}, \ldots$ – целочисленная арифметическая прогрессия: $\frac{S_n}{n} = a + (n-1)d$ и $S_n = na + n(n-1)d$. Поэтому для любого натурального n получаем $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \big((n+1)a + (n+1)nd\big) - \big(na + n(n-1)d\big) = a + 2nd$ и $a_n = a + 2(n-1)d$.

По условию задачи, для некоторого натурального k выполнено $S_k = a_{k+1}$, то есть $ka + k(k-1)d = a + 2kd$ или $(k-1)a = k(3-k)d$; так как a и d – целые положительные числа, то $k = 2$, откуда $a = 2d$, и для любого натурального n получаем $a_n = a + 2(n-1)d = a + (n-1)a = na$.

В таком случае, $a_m = 2024$ (для некоторого натурального m) означает, что $ma = 2md = 2024$. Следовательно, число возможных значений m равно количеству натуральных делителей числа $2024/2 = 2^2 \cdot 11 \cdot 23$, т.е. $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let $a_1, a_2, a_3, \ldots$ be an arbitrary (fixed) sequence with the properties described in the task's formulation; to simplify the notation, we denote the first element of the sequence by a (by that, $a_1 = a$). For any positive integer n we denote by S_n the sum of the first n terms of the sequence; in particular, $S_1 = a_1 = a$.

For any positive integer n we have $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n}$ – this is some positive integer constant, we denote it by d; therefore, $\frac{S_1}{1}, \frac{S_2}{2}, \frac{S_3}{3}, \ldots$ is an integer arithmetic progression: $\frac{S_n}{n} = a + (n-1)d$ and $S_n = na + n(n-1)d$. Therefore, for any positive integer n we obtain $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \big((n+1)a + (n+1)nd\big) - \big(na + n(n-1)d\big) = a + 2nd$ and $a_n = a + 2(n-1)d$.

For some positive integer k we have $S_k = a_{k+1}$, thus $ka + k(k-1)d = a + 2kd$ or $(k-1)a = k(3-k)d$; since a and d are positive integers, then $k = 2$, whence $a = 2d$, and for any positive integer n we obtain $a_n = a + 2(n-1)d = a + (n-1)a = na$.

In this case, $a_m = 2024$ (for some natural m) means that $ma = 2md = 2024$. By that, the number of possible values of m is equal to the number of positive integer divisors of $2024/2 = 2^2 \cdot 11 \cdot 23$ which is $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Task 5. Верны ли следующие утверждения для любого многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами?

1. Если многочлен $P(x)$ имеет вещественный корень, то и многочлен $P(P(x))$ имеет вещественный корень.
2. Если многочлен $P(P(x))$ имеет вещественный корень, то и многочлен $P(x)$ имеет вещественный корень.

Обоснуйте свой ответ.

Are the following statements true for any polynomial $P(x)$ with real coefficients?

1. If the polynomial $P(x)$ has a real root, then the polynomial $P(P(x))$ has a real root.
2. If the polynomial $P(P(x))$ has a real root, then the polynomial $P(x)$ has a real root.

Explain your answer.

Решение (RUS). Докажем для любого многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами, что если $P(P(x))$ имеет вещественный корень, то и многочлен $P(x)$ имеет вещественный корень. Действительно, если $a \in \mathbb{R}$ – вещественный корень $P(P(x))$, т.е. $P(P(a)) = 0$, то существует такое $b = P(a) \in \mathbb{R}$, что $P(P(a)) = P(b) = 0$, то есть b – вещественный корень $P(x)$.

Приведем пример многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами, который имеет вещественный корень, но при этом многочлен $P(P(x))$ не имеет ни одного вещественного корня: пусть $P(x) = x^2 + 3x + 2$ – этот многочлен имеет два вещественных корня: -2 и -1, поэтому корни $P(P(x))$ – это корни уравнений $x^2 + 3x + 2 = -2$ и $x^2 + 3x + 2 = -1$, являющиеся комплексными числами.

Критерии оценивания:

- приведен контрпример в п.1: +2 первичных балла;
- приведено верное доказательство в п.2: +3 первичных балла;
- не показано, почему контрпример в п.1 является таковым: -1 первичный балл;
- не обозначен корень многочлена в п.2: -1 первичный балл.

Solution (ENG). Lets prove for any polynomial $P(x)$ with real coefficients that if $P(P(x))$ has a real root, then the polynomial $P(x)$ also has a real root. Indeed, if $a \in \mathbb{R}$ is a real root of $P(P(x))$, i.e. $P(P(a)) = 0$, then there exists $b = P(a) \in \mathbb{R}$ such that $P(P(a)) = P(b) = 0$, i.e. b is a real root of $P(x)$.

Lets give an example of a polynomial $P(x)$ with real coefficients that has a real root, but the polynomial $P(P(x))$ does not have any real roots: let $P(x) = x^2 + 3x + 2$ – this polynomial has two real roots: -2 and -1, therefore the roots of $P(P(x))$ are the roots of the equations $x^2 + 3x + 2 = -2$ and $x^2 + 3x + 2 = -1$, which are complex numbers.

Criteria:

- a counterexample is given in p.1: +2 pre-points;
- a correct proof is given in p.2: +3 pre-points;
- it is not shown why the counterexample in p.1 is a counterexample: -1 pre-point;
- the root of the polynomial in p.2 is not indicated: -1 pre-point.

Task 6. Дан четырехугольник $ABCD$. Известно, что существует окружность, касающаяся сторон угла BAD и продолжений сторон BC и CD. Найдите AD, если $AB = 7$, $BC = 8$, $CD = 5$. Обоснуйте свой ответ.

Given a quadrilateral $ABCD$. It is known that there is a circle tangent to the sides of angle BAD and the extensions of sides BC and CD. Find AD while $AB = 7$, $BC = 8$, $CD = 5$. Explain your answer.

Answer: 10

Решение (RUS). Возможны четыре взаимных расположения $ABCD$ и упомянутой окружности (см. рисунки ниже). Отметим, что варианты 3 и 4 (на картинках ниже) невозможны, т.к. подсчет AD в этих случаях приводит к $AD < 0$. Осталось рассмотреть случаи 1 и 2 (верхние картинки).

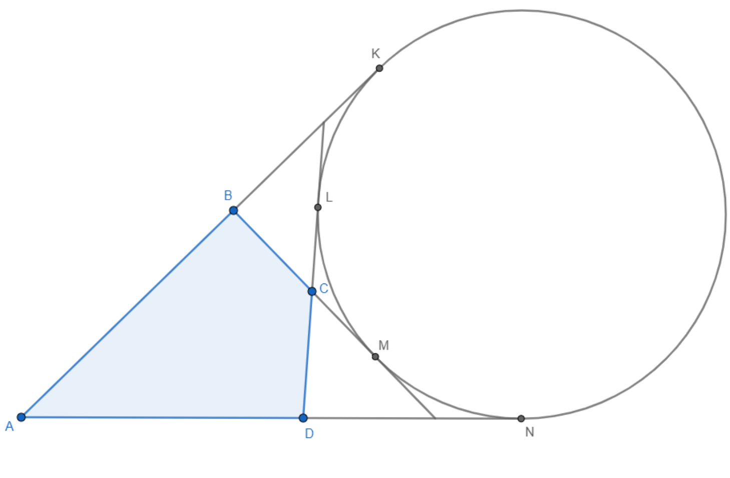
Согласно свойству касательных к окружности, получим $BM = BK$ и $AB+BM = AK = AN = AD + DL$, т.е.

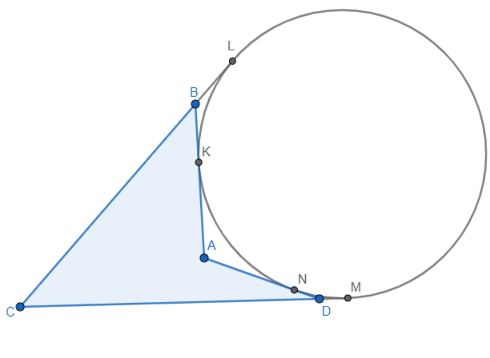
$$AB + BC + CM = AD + DC + CL$$

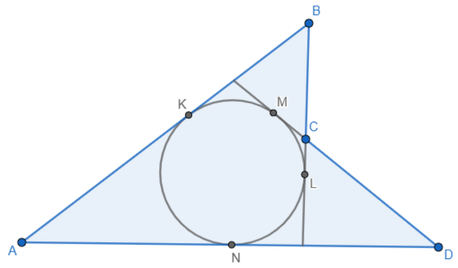
Учитывая $CL = CM$, получаем $AB + BC = AD + DC$, откуда $AD = 10$. Второй возможный случай рассматривается аналогично.

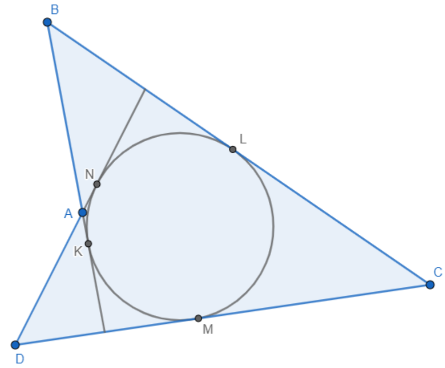
Критерии оценивания:

- дан верный ответ – 1 первичный балл;
- рассмотрен невозможный случай, и доказано противоречие условию – 2 первичных балла;
- рассмотрен возможный случай, дан верный ответ – 3 первичных балла;
- рассмотрены все варианты, дан верный ответ – 5 первичных баллов.









Solution (ENG). There are four possible mutual arrangements of $ABCD$ and the circle mentioned (see the pictures above). Note that options 3 and 4 (the two lower pictures) are impossible, since calculating AD in these cases leads to $AD < 0$. It remains to consider cases 1 and 2 (the upper pictures).

According to the property of tangents to a circle, we get $BM = BK$ and $AB + BM = AK = AN = AD + DL$, i.e.

$$AB + BC + CM = AD + DC + CL$$

Considering $CL = CM$, we get $AB + BC = AD + DC$, and by that $AD = 10$. The second possible case is considered similarly.

Criteria:

- the correct answer is given – 1 pre-point;
- one impossible arrangement is considered and its incosnistence is proven– 2 pre-points;
- one possible arrangement is considered, the correct answer is given – 3 pre-points;
- all arrangements are considered, the correct answer is given – 5 pre-points.

10^{th} degree

Task 1.

1. Известно, что есть ровно 2^{2024} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее нечётное число элементов. Чему равно количество элементов множества A?

   There are exactly 2^{2024} ways to select from a finite set A a subset containing an odd number of elements. What is the number of elements in the set A?

   Answer: 2025

2. Известно, что есть ровно 2^{2024} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее чётное (возможное, нулевое) число элементов. Чему равно количество элементов множества A?

   There are exactly 2^{2024} ways to select from a finite set A a subset containing an even (possibly, zero) number of elements. What is the number of elements in the set A?

   Answer: 2025

3. Известно, что есть ровно 2^{101} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее нечётное число элементов. Чему равно количество элементов множества A?

   There are exactly 2^{101} ways to select from a finite set A a subset containing an odd number of elements. What is the number of elements in the set A?

   Answer: 102

4. Известно, что есть ровно 2^{101} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее чётное (возможное, нулевое) число элементов. Чему равно количество элементов множества A?

   There are exactly 2^{101} ways to select from a finite set A a subset containing an even (possibly, zero) number of elements. What is the number of elements in the set A?

   Answer: 102

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Зафиксируем некоторый элемент x множества A. Теперь разобьем все его подмножества на пары, отличающиеся только наличием (либо отсутствием) элемента x. Очевидно, в каждой паре одно подмножество содержит чётное (возможно, нулевое) число элементов, а другое – нечётное число элементов. Таким образом, «чётных» подмножеств столько же, сколько и «нечётных» – значит, если множество A содержит n элементов и, как следствие, 2^n подмножеств (включая пустое), то количество «нечётных» подмножеств равно $2^n : 2 = 2^{n-1}$. По условию это количество равно 2^{2024}, откуда $n = 2025$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Lets fix some element x of the set A. Now we divide all its subsets into pairs that differ only in the presence (or absence) of element x. Obviously, in each pair one subset contains an even (possibly zero) number of elements, and the other – an odd number of elements. Thus, there are as many «even» subsets as «odd» ones – by that, if set A contains n elements and (as a consequence) 2^n subsets (including the empty one), then the number of «odd» subsets is $2^n : 2 = 2^{n-1}$. By the task's condition, the number is 2^{2024}, thus $n = 2025$.

Task 2.

1. Даны чашечные весы: они могут абсолютно точно показывать равенство масс грузов на чашах весов, а если массы грузов различны, то показывают, на какой чаше груз тяжелее (но не показывают, на сколько груз тяжелее). Также дан набор гирь, масса каждой из которых – целое положительное число грамм. Про этот набор известно, что число гирь в нем – минимально возможное для того, чтобы определить с помощью этих гирь и чашечных весов массу M (в граммах) груза (M – натуральное число, не превосходящее 41). Найдите минимальную возможную суммарную массу гирь в наборе.

   A scale is given: it can absolutely accurately show the equality of the masses of the loads on the scale pans, and if the masses of the loads are different, then it shows on which pan the load is heavier (but does not show how much heavier the load is). Also given a set of weights, the mass of each being a positive integer number of grams. It is known about this set that the number of weights in it is the minimum possible for determining the mass of M grams of the load (M is a natural number not exceeding 41) using these weights and the scale pan. Find the minimum possible total mass of the weights in the set.

   Answer: 40

2. Даны чашечные весы: они могут абсолютно точно показывать равенство масс грузов на чашах весов, а если массы грузов различны, то показывают, на какой чаше груз тяжелее (но не показывают, на сколько груз тяжелее). Также дан набор гирь, масса каждой из которых – целое положительное число грамм. Про этот набор известно, что число гирь в нем – минимально возможное для того, чтобы определить с помощью этих гирь и чашечных весов массу M (в граммах) груза (M – натуральное число, не превосходящее 122). Найдите минимальную возможную суммарную массу гирь в наборе.

   A scale is given: it can absolutely accurately show the equality of the masses of the loads on the scale pans, and if the masses of the loads are different, then it shows on which pan the load is heavier (but does not show how much heavier the load is). Also given a set of weights, the mass of each being a positive integer number of grams. It is known about this set that the number of weights in it is the minimum possible for determining the mass of M grams of the load (M is a natural number not exceeding 122) using these weights and the scale pan. Find the minimum possible total mass of the weights in the set.

   Answer: 121

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* См. решение задачи 11.6.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* See the solution of the task 11.6.

Task 3.

1. Рассмотрим рекурсивный алгоритм для неотрицательных целых a, b, c:

$$F(a,b,c) = \begin{cases} c, & \text{если } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{если } b \text{ четное} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{если } b \text{ нечетное} \end{cases}$$

Решите уравнение: $F(x,x,x) = 110$.

Consider a recursive algorithm for non-negative integers a, b, c:

$$F(a,b,c) = \begin{cases} c, & \text{if } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{if } b \text{ is even} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{if } b \text{ is odd} \end{cases}$$

Solve the equation: $F(x,x,x) = 110$.

Answer: 10

2. Рассмотрим рекурсивный алгоритм для неотрицательных целых a, b, c:

$$F(a,b,c) = \begin{cases} c, & \text{если } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{если } b \text{ четное} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{если } b \text{ нечетное} \end{cases}$$

Решите уравнение: $F(x,x,x) = 240$.

Consider a recursive algorithm for non-negative integers a, b, c:

$$F(a,b,c) = \begin{cases} c, & \text{if } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{if } b \text{ is even} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{if } b \text{ is odd} \end{cases}$$

Solve the equation: $F(x,x,x) = 240$.

Answer: 15

3. Рассмотрим рекурсивный алгоритм для неотрицательных целых a, b, c:

$$F(a,b,c) = \begin{cases} c, & \text{если } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{если } b \text{ четное} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{если } b \text{ нечетное} \end{cases}$$

Решите уравнение: $F(x, x, x) = 90$.

Consider a recursive algorithm for non-negative integers a, b, c:

$$F(a,b,c) = \begin{cases} c, & \text{if } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{if } b \text{ is even} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{if } b \text{ is odd} \end{cases}$$

Solve the equation: $F(x, x, x) = 90$.

Answer: 9

4. Рассмотрим рекурсивный алгоритм для неотрицательных целых a, b, c:

$$F(a,b,c) = \begin{cases} c, & \text{если } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{если } b \text{ четное} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{если } b \text{ нечетное} \end{cases}$$

Решите уравнение: $F(x, x, x) = 182$.

Consider a recursive algorithm for non-negative integers a, b, c:

$$F(a,b,c) = \begin{cases} c, & \text{if } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{if } b \text{ is even} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{if } b \text{ is odd} \end{cases}$$

Solve the equation: $F(x, x, x) = 182$.

Answer: 13

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)*
Докажем индукцией по $b \geq 0$ следующее утверждение: $F(a, b, c) = ab+c$. База индукции: $F(a, 0, c) = c = a \cdot 0 + c = c$.
Пусть для некоторого $b \geq 0$ имеет место $F(a, k, c) = ak + c$ для всех $0 \leq k \leq b$. Вычислим $F(a, b+1, c)$:
Если $b+1$ чётно, то $b+1 = 2k$, где $0 \leq k \leq b$. Тогда $F(a, b+1, c) = F(a, 2k, c) = F(2a, k, c) = 2a \cdot k + c = a(b+1) + c$.
Если $b+1$ нечётно, то $b+1 = 2k+1$, где $0 \leq k \leq b$. Тогда $F(a, b+1, c) = F(a, 2k+1, c) = F(2a, k, c+a) = 2a \cdot k + c + a = a(b+1) + c$.

Следовательно, $F(a, b, c) = ab + c$ для всех $b \geq 0$, и потому $F(a, a, a) = a^2 + a$. Значит, уравнение $F(x, x, x) = 110$ приводится к виду $x^2 + x = 110$, и единственный его целый неотрицательный корень – число 10.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)*
Lets prove the following statement by induction on $b \geq 0$: $F(a, b, c) = ab + c$. Base of the induction: $F(a, 0, c) = c = a \cdot 0 + c = c$.
Let for some $b \geq 0$ we have $F(a, k, c) = ak + c$ for all $0 \leq k \leq b$. We calculate $F(a, b+1, c)$:
If $b+1$ is even, then $b+1 = 2k$, where $0 \leq k \leq b$. Then $F(a, b+1, c) = F(a, 2k, c) = F(2a, k, c) =$

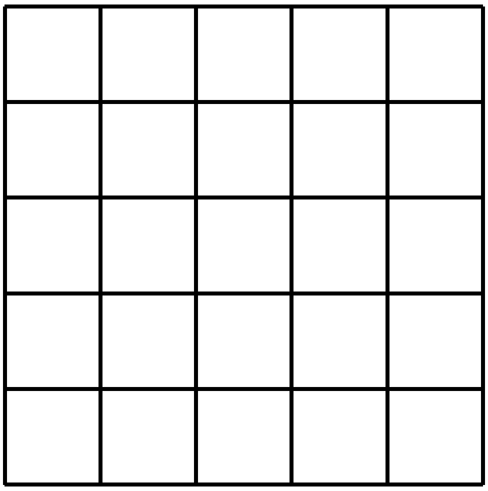
$2a \cdot k + c = a(b+1) + c$.
If $b+1$ is odd, then $b+1 = 2k+1$, where $0 \le k \le b$. Then $F(a, b+1, c) = F(a, 2k+1, c) = F(2a, k, c+a) = 2a \cdot k + c + a = a(b+1) + c$.

Therefore, $F(a, b, c) = ab + c$ for all $b \ge 0$, thus $F(a, a, a) = a^2 + a$. By that, the equation $F(x, x, x) = 110$ is reduced to the form $x^2 + x = 110$, and its only non-negative integer root is 10.

Task 4.

1. Город N состоит из 5×5 кварталов, каждый из которых – квадрат со стороной 100 метров (стороны квадратов – это улицы). Найдите наименьшую возможную длину пути, проходящего по каждой улице города N хотя бы по одному разу. Ответ дайте в метрах.

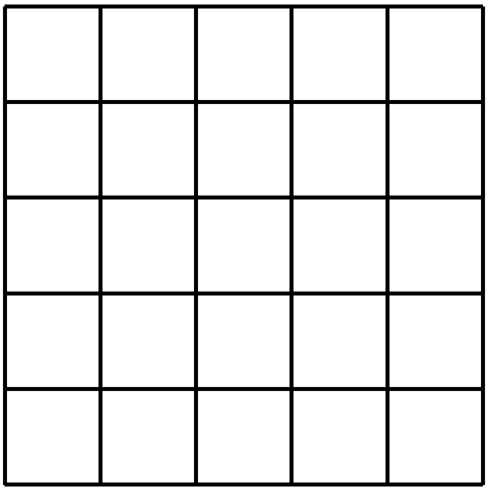
   Town N has 5×5 blocks, each of them being a square with a side of 100 meters (the sides of the squares are streets). Find the shortest possible length of a path that passes through each street of the town at least once. Give your answer in meters.



Answer: 6700

2. Город N состоит из 5×5 кварталов, каждый из которых – квадрат со стороной 200 метров (стороны квадратов – это улицы). Найдите наименьшую возможную длину пути, проходящего по каждой улице города N хотя бы по одному разу. Ответ дайте в метрах.

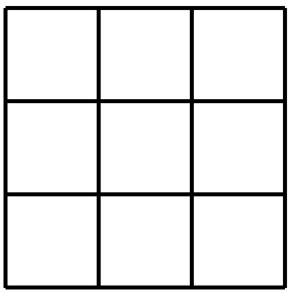
   Town N has 5×5 blocks, each of them being a square with a side of 200 meters (the sides of the squares are streets). Find the shortest possible length of a path that passes through each street of the town at least once. Give your answer in meters.



Answer: 13400

3. Город N состоит из 3×3 кварталов, каждый из которых – квадрат со стороной 100 метров (стороны квадратов – это улицы). Найдите наименьшую возможную длину пути, проходящего по каждой улице города N хотя бы по одному разу. Ответ дайте в метрах.

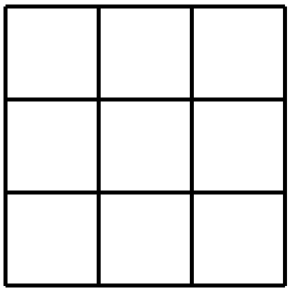
   Town N has 3×3 blocks, each of them being a square with a side of 100 meters (the sides of the squares are streets). Find the shortest possible length of a path that passes through each street of the town at least once. Give your answer in meters.



Answer: 2700

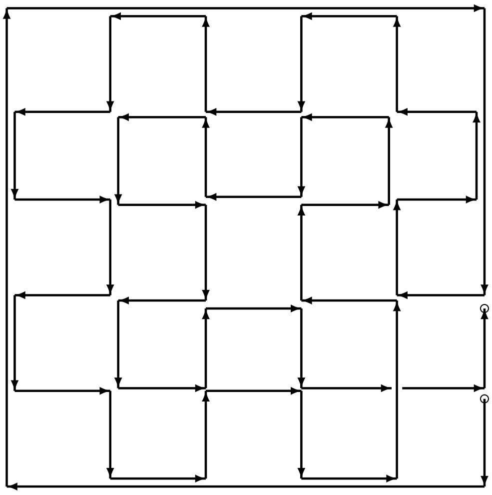
4. Город N состоит из 3×3 кварталов, каждый из которых – квадрат со стороной 200 метров (стороны квадратов – это улицы). Найдите наименьшую возможную длину пути, проходящего по каждой улице города N хотя бы по одному разу. Ответ дайте в метрах.

   Town N has 3×3 blocks, each of them being a square with a side of 200 meters (the sides of the squares are streets). Find the shortest possible length of a path that passes through each street of the town at least once. Give your answer in meters.



Answer: 5400

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* В городе N есть 60 отрезков улиц длиной по 100 метров каждый. Представим сеть улиц в виде плоского графа, где ребра – упомянутые отрезки, а вершины – перекрестки (в т.ч. перекрестки двух отрезков улиц в углах города), и заметим, что в этом графе 16 вершин нечетной степени. Две из них могут быть соответственно началом и концом пути, а остальные 14 придется посетить как минимум дважды, т.е придется пройти дважды как минимум по 7 ребрам (по одному на две «соседние» вершины нечетной степени), поэтому минимальное количество пройденных ребер не может быть меньше $60 + 7 = 67$, и тогда общая длина соответствующих отрезков улиц составляет не меньше 6700 метров. Соответствующий пример обхода приведен на рисунке.



Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* In the town N there are 60 street segments, each 100 meters long. Lets represent the street web as a planar graph, where the edges are the street segments mentioned, and the vertices are intersections (including intersections of two street segments at the corners of the city), and note that this graph has 16 vertices of odd degree. Two of them can be the beginning and end of the path, respectively, and the remaining 14 must be visited at least twice, i.e. it is necessary to traverse at least 7 edges twice (one for two adjacent vertices of odd degree), therefore the minimum number of edges traversed cannot be less than $60 + 7 = 67$, then the total length of the corresponding street segments is not less than 6700 meters. The corresponding example is shown on the picture above.

Task 5. Некоторая бесконечная последовательность натуральных чисел обладает следующим свойством: для любого целого положительного n среднее арифметическое первых $n + 1$ членов этой последовательности отличается от среднего арифметического ее первых n членов на одно и то же целое положительное число. Также известно, что некоторый член этой последовательности равен сумме всех предыдущих членов.

Сколько существует различных последовательностей, удовлетворяющих описанным выше условиям и содержащих число 2024? Обоснуйте свой ответ.

Some infinite sequence of positive integers has the following property: for any n, the arithmetic mean of the first $n+1$ terms of this sequence differs from the arithmetic mean of its first n terms by the same positive integer. It is also known that some term of this sequence is equal to the sum of all previous terms.

How many different sequences are there that satisfy the conditions described above and contain the number 2024? Explain your answer.

Answer: 12

Решение (RUS). Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – произвольная (фиксированная) последовательность, обладающая свойствами, описанных в условиях задачи; для упрощения обозначений обозначим первый элемент этой последовательности a (то есть $a_1 = a$). Для любого натурального n обозначим S_n сумму первых n членов последовательности; в частности, $S_1 = a_1 = a$.

По условию задачи, для любого натурального n имеем $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n}$ – это некоторая положительная целая константа, обозначим ее через d; следовательно, $\frac{S_1}{1}, \frac{S_2}{2}, \frac{S_3}{3}, \ldots$ – целочисленная арифметическая прогрессия: $\frac{S_n}{n} = a + (n-1)d$ и $S_n = na + n(n-1)d$. Поэтому для любого натурального n получаем $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \big((n+1)a + (n+1)nd\big) - \big(na + n(n-1)d\big) = a + 2nd$ и $a_n = a + 2(n-1)d$.

По условию задачи, для некоторого натурального k выполнено $S_k = a_{k+1}$, то есть $ka + k(k-1)d = a + 2kd$ или $(k-1)a = k(3-k)d$; так как a и d – целые положительные числа, то $k = 2$, откуда $a = 2d$, и для любого натурального n получаем $a_n = a + 2(n-1)d = a + (n-1)a = na$.

В таком случае, $a_m = 2024$ (для некоторого натурального m) означает, что $ma = 2md = 2024$. Следовательно, число возможных значений m равно количеству натуральных делителей числа $2024/2 = 2^2 \cdot 11 \cdot 23$, т.е. $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Критерии оценивания:

- получена нерекуррентная формула общего члена последовательности, но с ошибкой – 1 первичный балл;
- получена нерекуррентная формула общего члена последовательности без ошибок – 2 первичных балла;
- доказано, что только третий член последовательности может быть равен сумме предыдущих – 3 первичных балла;
- верно выполнены предыдущие пп., ответ вычислен с незначительной ошибкой – 4 первичных балла;
- верно выполнены предыдущие пп. и получен верный ответ – 5 первичных баллов.

Solution (ENG). Let $a_1, a_2, a_3, \ldots$ be an arbitrary (fixed) sequence with the properties described in the task's formulation; to simplify the notation, we denote the first element of the sequence by a (by that, $a_1 = a$). For any positive integer n we denote by S_n the sum of the first n terms of the sequence; in particular, $S_1 = a_1 = a$.

For any positive integer n we have $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n}$ – this is some positive integer constant, we denote it by d; therefore, $\frac{S_1}{1}, \frac{S_2}{2}, \frac{S_3}{3}, \ldots$ is an integer arithmetic progression: $\frac{S_n}{n} = a + (n-1)d$ and $S_n = na + n(n-1)d$. Therefore, for any positive integer n we obtain $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \big((n+1)a + (n+1)nd\big) - \big(na + n(n-1)d\big) = a + 2nd$ and $a_n = a + 2(n-1)d$.

For some positive integer k we have $S_k = a_{k+1}$, thus $ka + k(k-1)d = a + 2kd$ or $(k-1)a = k(3-k)d$; since a and d are positive integers, then $k = 2$, whence $a = 2d$, and for any positive integer n we obtain $a_n = a + 2(n-1)d = a + (n-1)a = na$.

In this case, $a_m = 2024$ (for some natural m) means that $ma = 2md = 2024$. By that, the number of possible values of m is equal to the number of positive integer divisors of $2024/2 = 2^2 \cdot 11 \cdot 23$ which is $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Criteria:

- a non-recurrent formula for the general term of the sequence was obtained, but with an error – 1 pre-point;
- a non-recurrent formula for the general term of the sequence was obtained without errors – 2 pre-points;
- it was proven that only the third term of the sequence can be equal to the sum of the previous ones – 3 pre-points;
- the previous steps were completed correctly, the answer was calculated with a minor error – 4 pre-points;
- the previous steps were completed correctly and the correct answer was obtained – 5 pre-points.

Task 6. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, расположенные так, что $BC \parallel B_1C_1$, $AC \parallel A_1C_1$, и точки A, B, A_1, B_1 лежат на одной прямой. Пусть описанные окружности треугольников A_1BC и AB_1C пересекаются в точках P, Q. Докажите, что точки P, Q, C_1 лежат на одной прямой.

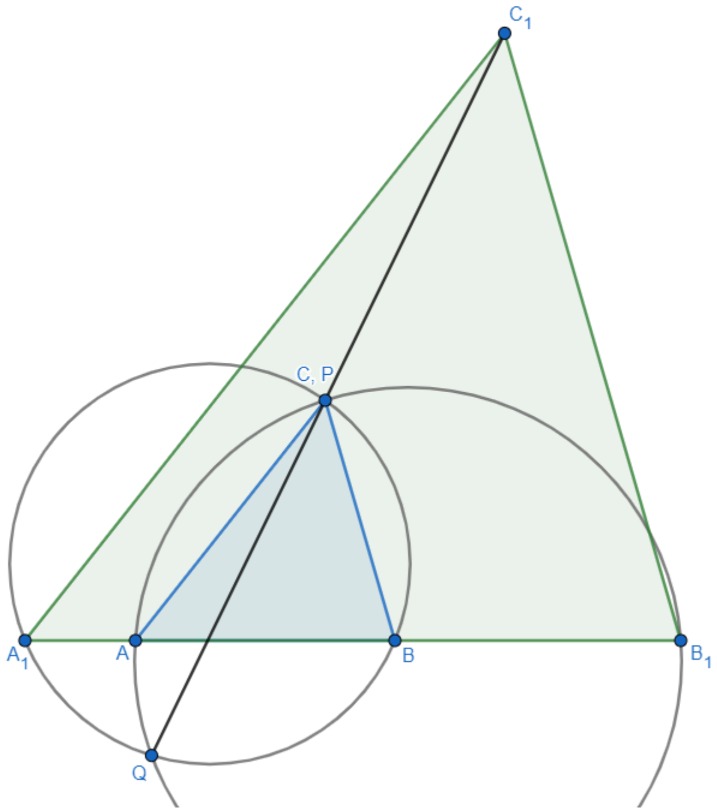
Given triangles ABC and $A_1B_1C_1$ located in such way that $BC \parallel B_1C_1$, $AC \parallel A_1C_1$, and points A, B, A_1, B_1 lie on a line. Let the circumscribed circles of triangles A_1BC and AB_1C intersect at points P, Q. Prove that points P, Q, C_1 lie on a line.

Решение (RUS). Ясно, что одна из общих точек упомянутых в условии окружностей – это точка C, поэтому пусть P – ее второе имя, а точка Q — вторая точка пересечения этих окружностей.

Тогда $\angle ACQ = \angle AB_1Q$ и $\angle QCB = \angle QA_1B$. Поэтому $\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB = \angle ACQ + \angle QCB = \angle AB_1Q + \angle QA_1B = \angle A_1QB_1$, т.е. точки A_1, B_1, C_1 и Q лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle A_1C_1Q = \angle A_1B_1Q = \angle ACQ$. Учитывая, что $A_1C_1 \parallel AC$, получаем требуемое.

Критерии оценивания:

- приведена потенциально плодотворная идея доказательства, но с серьезной ошибкой в рассуждениях – 2 первичных балла;
- приведена потенциально плодотворная идея доказательства, но с ошибкой в вычислениях – 3 первичных балла;
- в доказательстве содержатся только незначительные ошибки – 4 первичных балла;
- полностью верное доказательство – 5 первичных баллов.



Solution (ENG). It is clear that one of the common points of the circles mentioned in the task's formulation is point C, so let P be its second name, and point Q be the second intersection point of the circles.

Then $\angle ACQ = \angle AB_1Q$ and $\angle QCB = \angle QA_1B$. By that, $\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB = \angle ACQ + \angle QCB = \angle AB_1Q + \angle QA_1B = \angle A_1QB_1$, i.e. points A_1, B_1, C_1 and Q lie on the same circle. Thus, $\angle A_1C_1Q = \angle A_1B_1Q = \angle ACQ$. Considering that $A_1C_1 \parallel AC$, we obtain the required conclusion.

Criteria:

- a potentially fruitful idea for a proof is given, but it contains a serious error in reasoning – 2 pre-points;
- a potentially fruitful idea for a proof is given, but it contains an error in calculations – 3 pre-points;
- the proof contains only minor errors – 4 pre-points;
- a completely correct proof – 5 pre-points.

11-12th degree

Task 1.

1. Известно, что есть ровно 2^{2024} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее нечётное число элементов. Чему равно количество элементов множества A?

   There are exactly 2^{2024} ways to select from a finite set A a subset containing an odd number of elements. What is the number of elements in the set A?

   Answer: 2025

2. Известно, что есть ровно 2^{2024} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее чётное (возможное, нулевое) число элементов. Чему равно количество элементов множества A?

   There are exactly 2^{2024} ways to select from a finite set A a subset containing an even (possibly, zero) number of elements. What is the number of elements in the set A?

   Answer: 2025

3. Известно, что есть ровно 2^{101} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее нечётное число элементов. Чему равно количество элементов множества A?

   There are exactly 2^{101} ways to select from a finite set A a subset containing an odd number of elements. What is the number of elements in the set A?

   Answer: 102

4. Известно, что есть ровно 2^{101} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее чётное (возможное, нулевое) число элементов. Чему равно количество элементов множества A?

   There are exactly 2^{101} ways to select from a finite set A a subset containing an even (possibly, zero) number of elements. What is the number of elements in the set A?

   Answer: 102

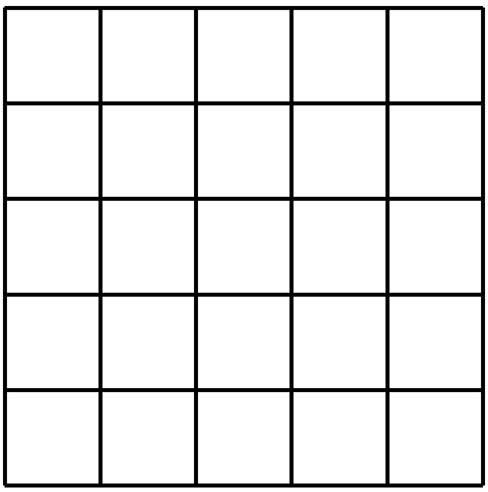
Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* Зафиксируем некоторый элемент x множества A. Теперь разобьем все его подмножества на пары, отличающиеся только наличием (либо отсутствием) элемента x. Очевидно, в каждой паре одно подмножество содержит чётное (возможно, нулевое) число элементов, а другое – нечётное число элементов. Таким образом, «чётных» подмножеств столько же, сколько и «нечётных» – значит, если множество A содержит n элементов и, как следствие, 2^n подмножеств (включая пустое), то количество «нечётных» подмножеств равно $2^n : 2 = 2^{n-1}$. По условию это количество равно 2^{2024}, откуда $n = 2025$.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Lets fix some element x of the set A. Now we divide all its subsets into pairs that differ only in the presence (or absence) of element x. Obviously, in each pair one subset contains an even (possibly zero) number of elements, and the other – an odd number of elements. Thus, there are as many «even» subsets as «odd» ones – by that, if set A contains n elements and (as a consequence) 2^n subsets (including the empty one), then the number of «odd» subsets is $2^n : 2 = 2^{n-1}$. By the task's condition, the number is 2^{2024}, thus $n = 2025$.

Task 2.

1. Город N состоит из 5×5 кварталов, каждый из которых – квадрат со стороной 100 метров (стороны квадратов – это улицы). Найдите наименьшую возможную длину пути, проходящего по каждой улице города N хотя бы по одному разу. Ответ дайте в метрах.

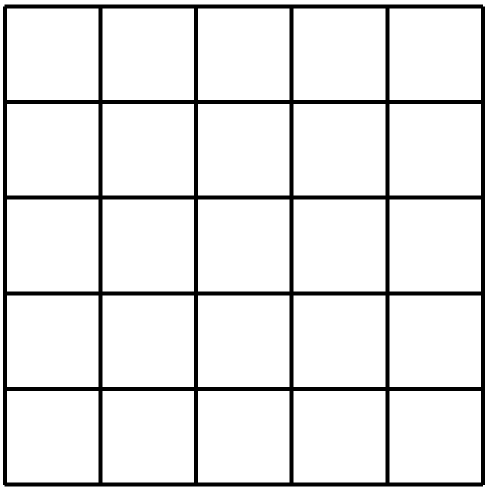
   Town N has 5×5 blocks, each of them being a square with a side of 100 meters (the sides of the squares are streets). Find the shortest possible length of a path that passes through each street of the town at least once. Give your answer in meters.



   Answer: 6700

2. Город N состоит из 5×5 кварталов, каждый из которых – квадрат со стороной 200 метров (стороны квадратов – это улицы). Найдите наименьшую возможную длину пути, проходящего по каждой улице города N хотя бы по одному разу. Ответ дайте в метрах.

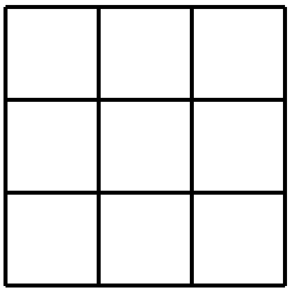
   Town N has 5×5 blocks, each of them being a square with a side of 200 meters (the sides of the squares are streets). Find the shortest possible length of a path that passes through each street of the town at least once. Give your answer in meters.



Answer: 13400

3. Город N состоит из 3×3 кварталов, каждый из которых – квадрат со стороной 100 метров (стороны квадратов – это улицы). Найдите наименьшую возможную длину пути, проходящего по каждой улице города N хотя бы по одному разу. Ответ дайте в метрах.

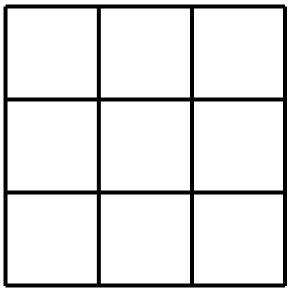
   Town N has 3×3 blocks, each of them being a square with a side of 100 meters (the sides of the squares are streets). Find the shortest possible length of a path that passes through each street of the town at least once. Give your answer in meters.



Answer: 2700

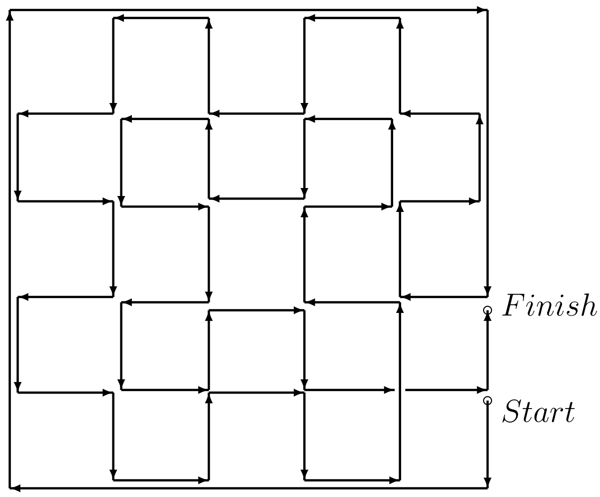
4. Город N состоит из 3×3 кварталов, каждый из которых – квадрат со стороной 200 метров (стороны квадратов – это улицы). Найдите наименьшую возможную длину пути, проходящего по каждой улице города N хотя бы по одному разу. Ответ дайте в метрах.

   Town N has 3×3 blocks, each of them being a square with a side of 200 meters (the sides of the squares are streets). Find the shortest possible length of a path that passes through each street of the town at least once. Give your answer in meters.



Answer: 5400

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)* В городе N есть 60 отрезков улиц длиной по 100 метров каждый. Представим сеть улиц в виде плоского графа, где ребра – упомянутые отрезки, а вершины – перекрестки (в т.ч. перекрестки двух отрезков улиц в углах города), и заметим, что в этом графе 16 вершин нечетной степени. Две из них могут быть соответственно началом и концом пути, а остальные 14 придется посетить как минимум дважды, т.е придется пройти дважды как минимум по 7 ребрам (по одному на две «соседние» вершины нечетной степени), поэтому минимальное количество пройденных ребер не может быть меньше $60 + 7 = 67$, и тогда общая длина соответствующих отрезков улиц составляет не меньше 6700 метров. Соответствующий пример обхода приведен на рисунке.



Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* In the town N there are 60 street segments, each 100 meters long. Lets represent the street web as a planar graph, where the edges are the street segments mentioned, and the vertices are intersections (including intersections of two street segments at the corners of the city), and note that this graph has 16 vertices of odd degree. Two of them can be the beginning and end of the path, respectively, and the remaining 14 must be visited at least twice, i.e. it is necessary to traverse at least 7 edges twice (one for two adjacent vertices of odd degree), therefore the minimum number of edges traversed cannot be less than $60 + 7 = 67$, then the total length of the corresponding street segments is not less than 6700 meters. The corresponding example is shown on the picture above.

Task 3.

1. Рассмотрим рекурсивный алгоритм для неотрицательных целых a, b, c:

$$F(a,b,c) = \begin{cases} c, & \text{если } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{если } b \text{ четное} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{если } b \text{ нечетное} \end{cases}$$

Решите уравнение: $F(x,x,x) = 110$.

Consider a recursive algorithm for non-negative integers a, b, c:

$$F(a,b,c) = \begin{cases} c, & \text{if } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{if } b \text{ is even} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{if } b \text{ is odd} \end{cases}$$

Solve the equation: $F(x,x,x) = 110$.

Answer: 10

2. Рассмотрим рекурсивный алгоритм для неотрицательных целых a, b, c:

$$F(a,b,c) = \begin{cases} c, & \text{если } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{если } b \text{ четное} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{если } b \text{ нечетное} \end{cases}$$

Решите уравнение: $F(x,x,x) = 240$.

Consider a recursive algorithm for non-negative integers a, b, c:

$$F(a,b,c) = \begin{cases} c, & \text{if } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{if } b \text{ is even} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{if } b \text{ is odd} \end{cases}$$

Solve the equation: $F(x,x,x) = 240$.

Answer: 15

3. Рассмотрим рекурсивный алгоритм для неотрицательных целых a, b, c:

$$F(a,b,c) = \begin{cases} c, & \text{если } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{если } b \text{ четное} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{если } b \text{ нечетное} \end{cases}$$

Решите уравнение: $F(x,x,x) = 90$.

Consider a recursive algorithm for non-negative integers a, b, c:

$$F(a,b,c) = \begin{cases} c, & \text{if } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{if } b \text{ is even} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{if } b \text{ is odd} \end{cases}$$

Solve the equation: $F(x, x, x) = 90$.

Answer: 9

4. Рассмотрим рекурсивный алгоритм для неотрицательных целых a, b, c:

$$F(a,b,c) = \begin{cases} c, & \text{если } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{если } b \text{ четное} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{если } b \text{ нечетное} \end{cases}$$

Решите уравнение: $F(x, x, x) = 182$.

Consider a recursive algorithm for non-negative integers a, b, c:

$$F(a,b,c) = \begin{cases} c, & \text{if } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{if } b \text{ is even} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{if } b \text{ is odd} \end{cases}$$

Solve the equation: $F(x, x, x) = 182$.

Answer: 13

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)*
Докажем индукцией по $b \geq 0$ следующее утверждение: $F(a, b, c) = ab+c$. База индукции: $F(a, 0, c) = c = a \cdot 0 + c = c$.
Пусть для некоторого $b \geq 0$ имеет место $F(a, k, c) = ak + c$ для всех $0 \leq k \leq b$. Вычислим $F(a, b + 1, c)$:
Если $b + 1$ чётно, то $b + 1 = 2k$, где $0 \leq k \leq b$. Тогда $F(a, b + 1, c) = F(a, 2k, c) = F(2a, k, c) = 2a \cdot k + c = a(b + 1) + c$.
Если $b + 1$ нечётно, то $b + 1 = 2k + 1$, где $0 \leq k \leq b$. Тогда $F(a, b + 1, c) = F(a, 2k + 1, c) = F(2a, k, c + a) = 2a \cdot k + c + a = a(b + 1) + c$.

Следовательно, $F(a, b, c) = ab + c$ для всех $b \geq 0$, и потому $F(a, a, a) = a^2 + a$. Значит, уравнение $F(x, x, x) = 110$ приводится к виду $x^2 + x = 110$, и единственный его целый неотрицательный корень – число 10.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)*
Lets prove the following statement by induction on $b \geq 0$: $F(a, b, c) = ab + c$. Base of the induction: $F(a, 0, c) = c = a \cdot 0 + c = c$.
Let for some $b \geq 0$ we have $F(a, k, c) = ak + c$ for all $0 \leq k \leq b$. We calculate $F(a, b + 1, c)$:
If $b + 1$ is even, then $b + 1 = 2k$, where $0 \leq k \leq b$. Then $F(a, b + 1, c) = F(a, 2k, c) = F(2a, k, c) = 2a \cdot k + c = a(b + 1) + c$.
If $b + 1$ is odd, then $b + 1 = 2k + 1$, where $0 \leq k \leq b$. Then $F(a, b + 1, c) = F(a, 2k + 1, c) = F(2a, k, c + a) = 2a \cdot k + c + a = a(b + 1) + c$.

Therefore, $F(a, b, c) = ab + c$ for all $b \geq 0$, thus $F(a, a, a) = a^2 + a$. By that, the equation $F(x, x, x) = 110$ is reduced to the form $x^2 + x = 110$, and its only non-negative integer root is 10.

Task 4.

1. Назовем *n-звездой* замкнутую ломаную с n равными звеньями и вершинами в вершинах правильного n-угольника ($n \geqslant 3$). Сколько существует 40-звезд?

   Lets call a closed polyline with n equal links and vertices at the vertices of a regular n-gon ($n \geqslant 3$) an *n-star*. How many 40-stars are there?

   Answer: 8

2. Назовем *n-звездой* замкнутую ломаную с n равными звеньями и вершинами в вершинах правильного n-угольника ($n \geqslant 3$). Сколько существует 50-звезд?

   Lets call a closed polyline with n equal links and vertices at the vertices of a regular n-gon ($n \geqslant 3$) an *n-star*. How many 50-stars are there?

   Answer: 10

3. Назовем *n-звездой* замкнутую ломаную с n равными звеньями и вершинами в вершинах правильного n-угольника ($n \geqslant 3$). Сколько существует 80-звезд?

   Lets call a closed polyline with n equal links and vertices at the vertices of a regular n-gon ($n \geqslant 3$) an *n-star*. How many 80-stars are there?

   Answer: 16

4. Назовем *n-звездой* замкнутую ломаную с n равными звеньями и вершинами в вершинах правильного n-угольника ($n \geqslant 3$). Сколько существует 72-звезд?

   Lets call a closed polyline with n equal links and vertices at the vertices of a regular n-gon ($n \geqslant 3$) an *n-star*. How many 72-stars are there?

   Answer: 12

Решение (RUS). *(представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)*
Пусть AB – одно из звеньев ломаной-«звезды» из условия; назовем «шагом» звезды количество вершин n-угольника на меньшей дуге AB описанной около него окружности, увеличенное на 1 (например, если A, B – смежные вершины, то шаг звезды равен 1). Очевидно, что n-звезда однозначно задается своим шагом, причем звезды для шагов k и $n-k$ одинаковы.

Осталось понять, при каких k количество звеньев ломаной-«звезды» будет равно n: ясно, что если НОД$(n, k) = d > 1$, то из d подряд идущих вершин n-угольника только одна будет вершиной звезды, и потому количество ее звеньев будет меньше n.

Итак, k и n должны быть взаимно простыми, причем звезды разбиваются на пары равных, поэтому требуемое количество равно $\varphi(n)/2$, где $\varphi(n)$ – функция Эйлера числа n, т.е. количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n.

Поскольку $\varphi(40) = 16$, количество 40-звезд равно 8.

Solution (ENG). *(given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)* Let AB be one of the links of an n-star from the task's formulation; we will call the star's «step» the number of vertices of the n-gon on the smaller arc AB of the circle described about it, increased by 1 (for example, if A, B are adjacent vertices, then the step of the star is 1). Obviously, the n-star is uniquely determined by its step, and the stars for steps k and $n-k$ are the same.

It remains to understand for what k the number of links of an n-star will be equal to n: it is clear that if $\mathrm{GCD}(n,k) = d > 1$, then out of d consecutive vertices of the n-gon, only one will be a vertex of the star, and therefore the number of its links will be less than n.

So, k and n must be relatively prime, and the stars are divided into pairs of equal ones, so the required number is $\varphi(n)/2$, where $\varphi(n)$ is the Euler function of n, i.e. the number of positive integers not exceeding n and relatively prime to n.

Since $\varphi(40) = 16$, the number of 40-stars is 8.

Task 5. Среди всех ортогональных проекций треугольной пирамиды P на плоскость самую большую площадь имеет проекция на плоскость α, являющаяся четырехугольником и имеющая площадь 12. Найдите объем пирамиды P, если расстояние между ее скрещивающимися ребрами, параллельными α, равно 2. Обоснуйте свой ответ.

Among all orthogonal projections of a triangular pyramid P onto a plane, the projection onto the plane α, which is a quadrilateral of an area 12, has the largest area. Find the volume of the pyramid P while the distance between its edges parallel to α is 2. Explain your answer.

Answer: 8

Решение (RUS). Пусть скрещивающиеся ребра, о которых говорится в условии – AB, CD, а их проекции на плоскость α – $A'B', C'D'$, соответственно. Ввиду параллельности имеем $AB = A'B'$, $CD = C'D'$.

Кроме того, площадь S четырехугольника $A'B'C'D'$ может быть найдена как $\frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot C'D' \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между $A'B'$ и $C'D'$. В свою очередь, объем V пирамиды $ABCD$ можно найти как $\frac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot h \cdot \sin\varphi$, где h – расстояние между прямыми AB и CD. Отсюда получаем

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 2 = 8$$

Критерии оценивания:

- дан верный ответ без обоснований – 0 баллов;
- дан верный ответ и приведена потенциально плодотворная идея доказательства – 2 первичных балла;
- дан верный ответ, приведена и частично реализована потенциально плодотворная идея доказательства – 3 первичных балла;
- доказательство содержит только незначительные ошибки – 4 первичных балла;
- полностью верное доказательство – 5 первичных баллов.

Solution (ENG). Let the edges mentioned in the task's formulation be AB, CD, and their projections onto the plane α be $A'B', C'D'$, respectively. Due to parallelism, we have $AB = A'B'$, $CD = C'D'$.

In addition, the area S of the quadrilateral $A'B'C'D'$ can be found as $\frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot C'D' \cdot \sin\varphi$, where φ is the angle between $A'B'$ and $C'D'$. Moreover, the volume V of the pyramid $ABCD$ can be found as $\frac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot h \cdot \sin\varphi$, where h is the distance between the lines AB and CD. By that,

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 2 = 8$$

Criteria:

- the correct answer is given without explanation – 0 points;
- the correct answer is given and a potentially fruitful idea for proof is given – 2 pre-points;
- the correct answer is given, a potentially fruitful idea for proof is given and partially implemented – 3 pre-points;
- the proof contains only minor errors – 4 pre-points;
- a completely correct proof – 5 pre-points.

Task 6. Даны чашечные весы: они могут абсолютно точно показывать равенство масс грузов на чашах весов, а если массы грузов различны, то показывают, на какой чаше груз тяжелее (но не показывают, на сколько груз тяжелее). Также дан набор из n гирь, масса каждой из которых – целое положительное число грамм, чтобы определить с помощью этих гирь и чашечных весов любую массу $m \leqslant M(n)$ (m – целое положительное число грамм) груза, где $M(n)$ – максимально возможное для данного n. Найдите выражение для $M(n)$. Обоснуйте свой ответ.

A scale is given: it can show absolutely accurately the equality of the masses of the loads on the scale pans, and if the masses of the loads are different, it shows on which pan the load is heavier (but does not show how much heavier the load is). Also given a set of n weights (the mass of each is a positive integer number of grams) in order to determine with the scale any mass $m \leqslant M(n)$ (m is a positive integer number of grams) of the load, where $M(n)$ is the maximum possible for the given n. Find an expression for $M(n)$. Explain your answer.

Answer: 3^n

Решение (RUS). Для начала заметим, что гири не запрещено (а значит, можно) класть на обе чаши весов. Если мы можем определить, что вес w груза меньше $t+1$, но больше $t-1$ (для некоторого целого положительного t), то, конечно, $w = t$, т.к. по условию масса груза – целое число. Значит, не обязательно иметь возможность «взвешивать» все положительные целые $w \leqslant M(w)$, а достаточно взвешивать все чётные w от 2 до $M(w)-1$ ($M(w)$ должно быть нечётным, чтобы быть максимальным: если $w > M(w)-1$, то $w = M(w)$).

Без ограничения общности будем считать, что взвешиваемый груз лежит на левой чаше весов. Очевидно, для каждой из n гирь есть ровно 3 возможности: либо она лежит на правой чаше весов, либо на левой, либо вообще не участвует во взвешивании – значит, количество чётных масс, которые мы можем отмерить, не превосходит $\frac{3^n-1}{2}$: количество способов расположить n гирь минус одно (соответствует ситуации, когда мы вообще не кладем гири на весы), деленное на два, т.к. каждому расположению соответствует ненужное – «противоположное» (левая чаша меняется на правую, и наоборот), для которого $w < 0$, откуда $M(n) \leqslant 3^n$.

Выберем гири с массами $2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 3^2, 2 \cdot 3^3, \ldots, 2 \cdot 3^{n-1}$ грамм и покажем, как с их помощью определить любой положительный целый вес $w \leqslant 3^n$.

Нетрудно понять, что любое (целое положительное) число в троичной системе счисления можно представить в виде разности целых положительных чисел, в троичной записи которых не используется цифра «2». Если w чётное, то представим его в таком виде: $w = a - b$, где числа a, b записываются в троичной системе счисления без цифры «2», и цифры «1» стоят в этих числах в разных разрядах (иначе эти цифры можно заменить на нули). Ясно, что $a, b < 3^n$, т.е. в их троичной записи используются не более n значащих цифр (у каждого). Теперь пусть единице в k-м разряде соответствует гиря массой $2 \cdot 3^k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$), причем разряды числа a соответствуют правой чаше весов, а разряды b – левой. Таким образом, разности $a - b$ соответствует расположение гирь на двух чашах весов, тогда $a - b$ принимает все чётные значения от 2 до $(3^n - 1)$, т.е. мы можем взвесить любое положительное четное $w < 3^n$.

Если же w нечётно, то описанным выше способом определим четные $w + 1$ (если $w < 3^n$) и $w - 1$ (если $w > 1$) – так мы определим w с учетом того, что оно целое.

Критерии оценивания:

- приведена потенциально плодотворная идея решения – 1 первичный балл;
- приведена и частично реализована потенциально плодотворная идея решения – 2 первичных балла;
- приведена идея с троичной системой (в том или ином виде), но нет достаточного обоснования – 3 первичных балла;
- решение почти полностью верно за исключением незначительных ошибок, либо не учтено, что нечетные веса можно не уравнивать явно – 4 первичных балла;
- полностью верное решение – 5 первичных баллов.

Solution (ENG). Note that it is not prohibited (and therefore it is allowed) to place weights on both scale pans. If we can determine that the weight w of the load is less than $t+1$, but greater than $t-1$ (for some positive integer t), then, of course, $w = t$, since by the condition the mass of the load is an integer. It means that it is not necessary to be able to «weigh» all positive integers $w \leqslant M(w)$, but it is sufficient to weigh all even w from 2 to $M(w) - 1$ ($M(w)$ must be odd to be maximal: if $w > M(w) - 1$, then $w = M(w)$).

Without loss of generality, we assume that the load lies on the left scale pan. Obviously, for each of the n weights there are exactly 3 possibilities: either it lies on the right pan of the scale, or on the left, or does not participate in the weighing at all – this means that the number of even masses that we can measure does not exceed $\frac{3^n-1}{2}$: the number of ways to arrange n weights minus one (corresponds to the situation when we do not put weights on the scale at all), divided by two, since each arrangement corresponds to an unnecessary one – the «opposite» (the left pan changes to the right, and vice versa), for which $w < 0$, whence $M(n) \leqslant 3^n$.

Lets choose weights with masses $2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 3^2, 2 \cdot 3^3, \ldots, 2 \cdot 3^{n-1}$ grams and show how to use them to determine any positive integer weight $w \leqslant 3^n$.

It is easy to see that any (positive integer) number in the ternary notation can be represented as a difference of positive integers, in the ternary notation of which the digit «2» is not used. If w is even, then we will represent it in the following form: $w = a - b$, where the numbers a, b are written in the ternary notation without the digit «2», and the digits «1» are in different places in these numbers (otherwise these digits can be replaced with zeros). It is clear that $a, b < 3^n$, i.e. in their ternary notation no more than n significant digits are used (for each). Now let the k-th digit correspond to a weight of $2 \cdot 3^k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$), where the digits of a correspond to the right scale pan, and the digits of b correspond to the left. Thus, the difference $a - b$ corresponds to the arrangement of the weights on the two scale pans, then $a - b$ takes all even values from 2 to $(3^n - 1)$, i.e. we can weigh any positive even $w < 3^n$.

If w is odd, then we will use the method described above to determine even weights $w+1$ (if $w < 3^n$) and $w - 1$ (if $w > 1$) – this is how we will determine w taking into account that it is an integer.

Criteria:

- a potentially fruitful solution idea is given – 1 pre-point;
- a potentially fruitful solution idea is given and partially implemented – 2 pre-points;
- an idea with a ternary system (in one form or another) is given, but there is no sufficient explanation – 3 pre-points;
- the solution is almost completely correct except for minor errors, or it is not taken into account that odd weights do not need to be explicitly equalized – 4 pre-points;
- a completely correct solution – 5 pre-points.